Temat: Funkcje trygonometryczne (2h)

Wykład

https://www.youtube.com/watch?v=BeSijYu2KOQ

https://www.youtube.com/watch?v=rK5nitTXWIM

Notatka

2. Rozwiąż trójkąt prostokątny ABC, mając dane:
a) $a = 40,\ \alpha = 30°$, b) $b = 6,\ \alpha = 60°$, c) $a = \sqrt{2} - 1,\ b = \sqrt{6} - \sqrt{3}$.

3. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:
a) $\sin(90° - \alpha) = \frac{12}{13}$, b) $\cos(90° - \alpha) = \frac{3}{4}$, c) $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{7}{24}$.

4. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α.
a) $\cos\alpha = \frac{7}{25}$ b) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{6}$ d) $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$

Zad 2

a)

$\alpha + \beta + 90^o = 180^o$

$\alpha + \beta = 90^o$

$\beta = 90^o - \alpha$

$\beta = 90^o - 30^o$

$\beta = 60^o$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\sin 30^o = \frac{40}{c}$

$\frac{1}{2} \cdot c = 40$

$c = 80$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\cos 30^o = \frac{b}{80}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 80 = b$

$40\sqrt{3} = b$

b)

$\alpha + \beta + 90^o = 180^o$

$\alpha + \beta = 90^o$

$\beta = 90^o - \alpha$

$\beta = 90^o - 60^o$

$\beta = 30^o$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\cos 60^o = \frac{6}{c}$

$\frac{1}{2} \cdot c = 6$

$c = 12$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\sin 60^o = \frac{a}{12}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = a$

$a = 6\sqrt{3}$

c)

$a^2 + b^2 = c^2$

$(\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = c^2$

$2 - 2\sqrt{2} + 1 + 6 - 2\sqrt{18} + 3 = c^2$

$12 - 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = c^2$

$12 - 8\sqrt{2} = c^2$

$(2\sqrt{2} - 2)^2 = c^2$

$c = 2\sqrt{2} - 2$

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{2}$

$\alpha = 30^o$

$\alpha + \beta + 90^o = 180^o$

$\alpha + \beta = 90^o$

$\beta = 90^o - \alpha$

$\beta = 90^o - 30^o$

$\beta = 60^o$

Zad 3

a)

$$\sin(90^o - \alpha) = \frac{12}{13}$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{13}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha + \frac{144}{169} = 1$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{144}{169}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{169}{169} - \frac{144}{169}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{25}{169}$$

$$\sin\alpha = \frac{5}{13}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{13}\cdot\frac{13}{12} = \frac{5}{12}$$

b)

$$\cos(90^o - \alpha) = \frac{3}{4}$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{9}{16} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{16}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{16} - \frac{9}{16}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{7}{16}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

c)

$tg(90^o - \alpha) = \frac{7}{24}$

$\frac{1}{tg\alpha} = \frac{7}{24}$

$tg\alpha = \frac{24}{7}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{24}{7}$

$7\sin\alpha = 24\cos\alpha \quad | :7$

$\sin\alpha = \frac{24}{7}\cos\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(\frac{24}{7}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{576}{49}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{576}{49}\cos^2\alpha + \frac{49}{49}\cos^2\alpha = 1$

$\frac{625}{49}\cos^2\alpha = 1 \quad | : \frac{625}{49}$

$\cos^2\alpha = 1 : \frac{625}{49}$

$\cos^2\alpha = \frac{49}{625}$

$\cos\alpha = \frac{7}{25}$

$\sin\alpha = \frac{24}{7}\cos\alpha = \frac{24}{7}\cdot\frac{7}{25} = \frac{24}{25}$

Zad 4

a)

$\cos\alpha = \frac{7}{25}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + \left(\frac{7}{25}\right)^2 = 1$

$\sin^2\alpha + \frac{49}{625} = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{49}{625}$

$\sin^2\alpha = \frac{625}{625} - \frac{49}{625}$

$\sin^2\alpha = \frac{576}{625}$

$\sin\alpha = \frac{24}{25}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{25}\cdot\frac{25}{7} = \frac{24}{7}$

b)

$\sin\alpha = \frac{8}{17}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(\frac{8}{17}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{64}{289} + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{64}{289}$

$\cos^2\alpha = \frac{289}{289} - \frac{64}{289}$

$\cos^2\alpha = \frac{225}{289}$

$\cos\alpha = \frac{15}{17}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}} = \frac{8}{17}\cdot\frac{17}{15} = \frac{8}{15}$

Matematyka VI LO **06.03.2021 - 07.03.2021**

Temat: Funkcja wykładnicza i logarytmy (2h)

Wykład

https://www.youtube.com/watch?v=HM-pBD8qNco

https://www.youtube.com/watch?v=DBXCIzYNBAg

https://www.youtube.com/watch?v=vf-Q0c466sw

https://www.youtube.com/watch?v=Ubn1hMYpiCc

Notatka

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}_+$ i dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$ prawdziwe są wzory:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. **Logarytm** liczby b przy podstawie a to wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę logarytmowaną b.

$$\log_a b = x, \text{ gdy } \ a^x = b$$

Jeżeli a, b, x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a a^x = x \quad \text{oraz} \quad a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Ponadto dla dowolnego $\alpha \in \mathbf{R}$: $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$.

1. Przedstaw liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[9]{27}$ b) $\sqrt[9]{27\cdot\sqrt[3]{9\cdot\sqrt{3}}}$ c) $\frac{3\sqrt{3\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}$

2. Przedstaw liczbę w postaci a^x, gdzie $a\in\mathbf{N}$, $x\in\mathbf{W}$.

a) $3^{\frac{7}{4}}\cdot 9^{-\frac{3}{8}}$ c) $32^{\frac{7}{5}}\cdot\sqrt[3]{2^4}$ e) $\sqrt[4]{27^3}\cdot\left(\sqrt[3]{9}\right)^{-2}$

b) $25^{\frac{3}{4}} : 125^{-\frac{5}{2}}$ d) $\sqrt[5]{64} : (0{,}5)^{\frac{3}{5}}$ f) $(0{,}04)^{-\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[4]{5^3}$

3. Oblicz.

a) $\left[4\cdot(0{,}5)^{\sqrt{3}}\right]^{2+\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{5}^{\sqrt{5}}\cdot 5^{\sqrt{5}+1}}{125^{\frac{\sqrt{5}}{2}-1}}$ c) $(0{,}5)^{\sqrt{5}}\cdot 2^{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}\cdot(0{,}25)^{\sqrt{2}}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{3}{9}} = 3^{\frac{3}{2}}$

b) $\left[3^3\cdot(3^2\cdot 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{9}} = \left(3^3\cdot 3^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{9}} = 3^{\frac{23}{54}}$

c) $\frac{3\cdot 3^{\frac{3}{4}}}{\left(3^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{7}{4}}}{3^{\frac{7}{8}}} = 3^{\frac{7}{8}}$

2. a) $3^{\frac{7}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{4}} = 3^1$

b) $5^{\frac{3}{2}} : 5^{-\frac{15}{2}} = 5^9$

c) $2^7\cdot 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{25}{3}}$

d) $2^{\frac{6}{5}} : 2^{-\frac{3}{5}} = 2^{\frac{9}{5}}$

e) $3^{\frac{9}{4}}\cdot 3^{-\frac{4}{3}} = 3^{\frac{11}{12}}$

f) $5^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}} = 5^1$

3. a) $(2^2\cdot 2^{-\sqrt{3}})^{2+\sqrt{3}} = 2^{4-3} = 2$

b) $\frac{5^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\cdot 5^{\sqrt{5}+1}}{5^{\frac{3\sqrt{5}}{2}-3}} = \frac{5^{\frac{3\sqrt{5}}{2}+1}}{5^{\frac{3\sqrt{5}}{2}-3}} = 5^4 = 625$

c) $2^{-\sqrt{5}}\cdot 2^{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}\cdot 2^{-2\sqrt{2}} = 2^0 = 1$

4. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?

a) $f(x)=(2m-3)^x$ b) $f(x)=(1-4m)^{-x}$ c) $f(x)=(2-m^2)^x$

5. Określ, do którego z przedziałów: $(0;1)$ czy $(1;\infty)$ należy liczba a, jeżeli:

a) $a^{\sqrt{2}} < a^{\sqrt{3}}$, b) $a^{\frac{1}{\sqrt{2}}} < a^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$, c) $a^{-2} < a^{-3}$, d) $a^3 > \frac{1}{a^2}$.

6. Porównaj liczby, wpisując odpowiedni symbol: $<$, $>$ lub $=$ w miejsce ?.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$? $\sqrt{2}^{0{,}5}$ b) $0{,}6^{-3}$? $\left(\frac{5}{3}\right)^2$ c) $2{,}5^{2{,}5}$? $0{,}4^{-2{,}5}$

4. a) $2m-3>1$, czyli $m\in(2;\infty)$

b) $0<1-4m<1$, czyli $m\in\left(0;\frac{1}{4}\right)$

c) $2-m^2>1$, czyli $m\in(-1;1)$

5. a), d) $a\in(1;\infty)$

b), c) $a\in(0;1)$

6. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{-\sqrt{2}} < 2^{\frac{1}{4}} = (\sqrt{2})^{0{,}5}$

b) $0{,}6^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3 > \left(\frac{5}{3}\right)^2$

c) $2{,}5^{2{,}5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2{,}5} = 0{,}4^{-2{,}5}$

11. Oblicz.

a) $\log_{0{,}4}\frac{5}{3} + \log_{0{,}4}3 - \log_{0{,}4}2$ c) $3\log 2 - \log 0{,}2 + \log 25$

b) $\log_9 15 - \log_9\frac{20}{3} + 2\log_9 6$ d) $\log_{\sqrt{2}}6 + 2\log_{\sqrt{2}}2 - \log_{\sqrt{2}}3$

a)

$$\log_{0,4}\frac{5}{3}+\log_{0,4}3-\log_{0,4}2=\log_{0,4}\left(\frac{5}{3}\cdot 3:2\right)=$$

$$=\log_{0,4}\frac{5}{2}=\log_{\frac{2}{5}}\frac{5}{2}=-1$$

b)

$$\log_9 15-\log_9\frac{20}{3}+2\log_9 6=\log_9 15-\log_9\frac{20}{3}+\log_9 6^2=$$

$$=\log_9 15-\log_9\frac{20}{3}+\log_9 36=\log_9\left(15:\frac{20}{3}\cdot 36\right)=\log_9\left(15\cdot\frac{3}{20}\cdot 36\right)=$$

$$=\log_9\left(\frac{9}{4}\cdot 36\right)=\log_9(9\cdot 9)=\log_9 81=2$$

c)

$$3\log 2-\log 0{,}2+\log 25=\log 2^3-\log 0{,}2+\log 25=$$
$$=\log 8-\log 0{,}2+\log 25=\log(8:0{,}2\cdot 25)=\log(8\cdot 5\cdot 25)=\log 1000=3$$

d)

$$\log_{\sqrt{2}}6+2\log_{\sqrt{2}}2-\log_{\sqrt{2}}3=\log_{\sqrt{2}}6+\log_{\sqrt{2}}2^2-\log_{\sqrt{2}}3=\log_{\sqrt{2}}(6\cdot 4:3)=\log_{\sqrt{2}}8$$

$$\log_{\sqrt{2}}8=x$$

$$\sqrt{2}^x=8$$

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x=2^3$$

$$2^{\frac{1}{2}x}=2^3$$

$$\frac{1}{2}x=3$$

$$x=6$$