06.12.2020r. - matematyka – semestr III A – lekcja 1, 2

Temat: Rozwiązywanie wymierne równań wielomianowych.

P

Rozwiąż równanie: $2x^3 - 5x^2 + x + 3 = 0$.

Dzielniki wyrazu wolnego wielomianu $W(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 3$ to: $1, \; -1, \; 3, \; -3$.

$W(1) = 2 - 5 + 1 + 3 \neq 0$

$W(-1) = 2 \cdot (-1) - 5 - 1 + 3 \neq 0$

$W(3) = 2 \cdot 27 - 5 \cdot 9 + 3 + 3 \neq 0$

$W(-3) = 2 \cdot (-27) - 5 \cdot 9 - 3 + 3 \neq 0$

Sprawdzamy, czy równanie ma pierwiastki całkowite.

Dzielniki współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej to:

$1, \; -1, \; 2, \; -2$

Jeśli równanie ma rozwiązanie wymierne $\frac{p}{q}$, to licznik jest dzielnikiem liczby 3, a mianownik dzielnikiem liczby 2; wypisujemy wszystkie takie liczby $\frac{p}{q}$, że $p \in \{1, -1, 3, -3\}$ oraz $q \in \{1, -1, 2, -2\}$.

Możliwe rozwiązania wymierne:

$1, \; -1, \; \frac{1}{2}, \; -\frac{1}{2}, \; \frac{3}{2}, \; -\frac{3}{2}, \; 3, \; -3$

$W\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{8} - 5 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 3 \neq 0$

$W\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - 5 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 = -\frac{8}{4} + 3 \neq 0$

$W\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + 3 = \frac{27}{4} - \frac{45}{4} + \frac{18}{4} = 0$

Sprawdziliśmy już, że nie istnieją całkowite rozwiązania równania, zatem wystarczy sprawdzić, czy wśród liczb: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$ jest rozwiązanie równania.

$$
\begin{array}{l}
\underline{\;2x^2 - 2x - 2\;} \\
(2x^3 - 5x^2 + x + 3) : \left(x - \frac{3}{2}\right) \\
\underline{-2x^3 + 3x^2} \\
\qquad -2x^2 + x + 3 \\
\qquad \underline{\;\;2x^2 - 3x\;} \\
\qquad\qquad -2x + 3 \\
\qquad\qquad \underline{\;\;2x - 3\;} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Dzielimy wielomian przez dwumian $x - \frac{3}{2}$.

$\left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 2x - 2) = 0$

Zapisujemy równanie w innej postaci, a następnie je rozwiązujemy.

$x - \frac{3}{2} = 0$ lub $2x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \big| : 2$

$\underline{x = \frac{3}{2}}$ $\qquad x^2 - x - 1 = 0, \quad \Delta = 5$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$\underline{x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}, \quad \underline{x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$

Odp. Równanie ma trzy rozwiązania: $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$.

Zadanie 1. Rozwiąż równanie:

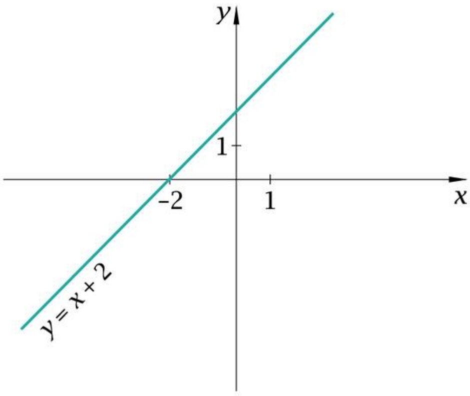
a) $-2x^3 - x^2 + 13x - 6 = 0$

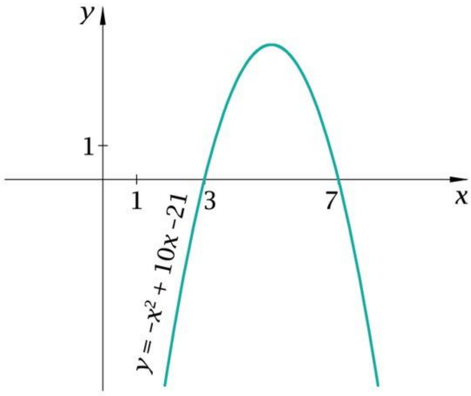
b) $2x^3 + 15x^2 + 27x + 10 = 0$

c) $-3x^3 + 7x^2 - 4 = 0$

06.12.2020r. - matematyka – semestr III A – lekcja 1, 2

Temat: Nierówności wielomianowe.





A

1. Korzystając z wykresów, podaj rozwiązania nierówności zapisanych pod rysunkami.

2. Korzystając z wyników otrzymanych w punkcie 1., ustal, jakie liczby spełniają nierówność:

$$(x+2)(-x^2+10x-21) > 0$$

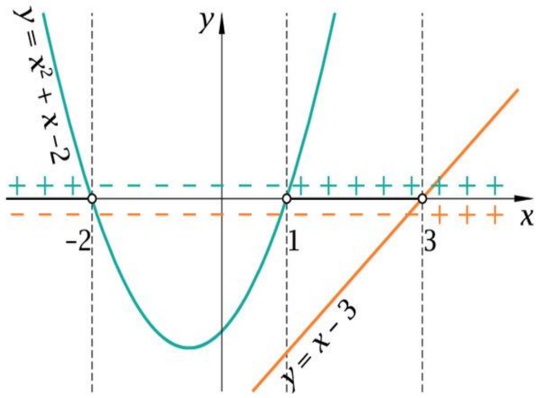
Zastanów się najpierw, jaki warunek muszą spełniać dwie liczby, aby ich iloczyn był liczbą dodatnią.

Pokażemy teraz, jak można rozwiązać nierówność:

$$(x-3)(x^2+x-2) < 0$$

Iloczyn dwóch czynników jest ujemny, gdy jeden z nich jest dodatni, a drugi ujemny. Aby rozwiązać nierówność $(x-3)(x^2+x-2) < 0$, musimy zatem znaleźć takie liczby x, dla których wartości wyrażeń $x-3$ i x^2+x-2 mają przeciwne znaki. W tym celu najwygodniej jest naszkicować w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = x-3$ oraz $y = x^2+x-2$, a następnie z rysunku odczytać, w jakich przedziałach wartości tych funkcji mają przeciwne znaki.

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $y = x - 3$ oraz wykres funkcji $y = x^2 + x - 2$; znakami plus i minus oznaczono, w jakich przedziałach funkcje te przyjmują wartości dodatnie, a w jakich ujemne.



Z rysunku możemy odczytać, że wartości funkcji $y = x - 3$ oraz $y = x^2 + x - 2$ mają przeciwne znaki w przedziale $(-\infty; -2)$, a także w przedziale $(1; 3)$. Zatem rozważana nierówność jest spełniona dla $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 3)$.