Temat: Potęgi o wykładnikach wymiernych. Potęgi o wykładnikach rzeczywistych.

Jeśli n, k są liczbami naturalnymi oraz $n > 1$ i $k > 0$, to przyjmujemy, że:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad (\text{dla } a \geqslant 0)$$

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \qquad (\text{dla } a \geqslant 0)$$

$$a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}} \qquad (\text{dla } a > 0)$$

PRZYKŁAD 1 Oblicz.

a) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

b) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4$

c) $32^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{32^3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[5]{32}\right)^3} = \frac{1}{8}$

d) $16^{1,5} = 16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3} = \left(\sqrt{16}\right)^3 = 4^3 = 64$

e) $2^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{2^6} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2} = 2\sqrt[5]{2}$

f) $8^{-1\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^4}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^4} = \frac{1}{16}$

ZADANIE Oblicz.

a) $10\,000^{\frac{1}{4}}$ b) $27^{\frac{2}{3}}$ c) $\left(\frac{1}{25}\right)^{1,5}$ d) $4^{-2\frac{1}{2}}$

Potęga o wykładniku wymiernym zdefiniowana jest tak, by spełnione zostały takie same prawa działań jak dla potęg o wykładnikach całkowitych.

PRAWA DZIAŁAŃ NA POTĘGACH O WYKŁADNIKACH WYMIERNYCH

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \text{ dla } a \geqslant 0$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \text{ dla } a > 0$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} \text{ dla } a \geqslant 0$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x \text{ dla } a \geqslant 0 \text{ i } b \geqslant 0$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \text{ dla } a \geqslant 0 \text{ i } b > 0$$

PRZYKŁAD 2 Przekształć wyrażenie.

a) $3^{\frac{5}{3}} \cdot 9^{\frac{5}{3}} = 27^{\frac{5}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^5 = \left(\sqrt[3]{27}\right)^5 = 3^5 = 243$

b) $\left(8^{-\frac{5}{6}}\right)^2 = 8^{-\frac{5}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^{-5} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$

c) $3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{27}$

d) $\frac{0{,}5^{-\frac{1}{8}}}{\left(2^{-\frac{1}{8}}\right)^7} = \frac{\left(2^{-1}\right)^{-\frac{1}{8}}}{2^{-\frac{7}{8}}} = \frac{2^{\frac{1}{8}}}{2^{-\frac{7}{8}}} = 2^{\frac{1}{8}-\left(-\frac{7}{8}\right)} = 2$

ZADANIE Oblicz.

a) $64^{\frac{3}{4}} : 4^{\frac{3}{4}}$ b) $27^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{4}}$ c) $\left(10^{-12}\right)^{-\frac{1}{3}}$ d) $\frac{4^{-\frac{1}{3}}}{\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^2}$

Korzystając z potęg o wykładnikach wymiernych, można także przekształcać niektóre wyrażenia z pierwiastkami.

PRZYKŁAD 3 Przekształć wyrażenie.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{32}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{10}} = \left(\sqrt{10}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{10}$

c) $\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{9}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot \left(3^2\right)^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}} = 3^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{3}$

d) $\sqrt[5]{8 \cdot \sqrt[3]{2}} = \left(2^3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(2^{\frac{10}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$

ZADANIE Przekształć wyrażenie.

a) $\sqrt{\sqrt{6}}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}}$ c) $\sqrt[4]{25} \cdot \sqrt{5}$ d) $\sqrt[3]{7\sqrt{7}}$

Gdy szacujemy potęgi, musimy pamiętać, że reguła „im większy wykładnik, tym większa potęga” dotyczy tylko potęg o podstawie większej od 1. Gdy podstawa potęgi należy do przedziału $(0;1)$ trzeba stosować regułę „im większy wykładnik, tym mniejsza potęga”.

Jeśli $a > 1$	Jeśli $0 < a < 1$
oraz	oraz
$x < y$	$x < y$
to	to
$a^x < a^y$	$a^x > a^y$

PRZYKŁAD 1 Korzystając z nierówności $3 < \sqrt{10} < 4$, oszacuj podaną liczbę.

a) $2^{\sqrt{10}}$

$\sqrt{10} > 3$, więc:

$$2^{\sqrt{10}} > 2^3 = 8$$

$\sqrt{10} < 4$, więc:

$$2^{\sqrt{10}} < 2^4 = 16$$

Wynika stąd, że:

$$8 < 2^{\sqrt{10}} < 16$$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{10}}$

$\sqrt{10} > 3$, więc:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{10}} < \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{8}$$

$\sqrt{10} < 4$, więc:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{10}} > \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \tfrac{1}{16}$$

Wynika stąd, że:

$$\tfrac{1}{16} < \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{10}} < \tfrac{1}{8}$$

ZADANIE Oszacuj liczbę w opisany powyżej sposób.

a) $3^{\sqrt{10}}$ b) $2^{\sqrt[3]{5}}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{7}}$

Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych obowiązuje także dla potęg o wykładnikach rzeczywistych.

PRZYKŁAD 2 Przekształć wyrażenie.

a) $3^{-2\sqrt{2}} \cdot 3^{3\sqrt{2}} = 3^{-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$

b) $\left(3^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}} = 3^3 = 27$

c) $\frac{7^{2-\pi}}{7^{-\pi}} = 7^{(2-\pi)-(-\pi)} = 7^2 = 49$

ZADANIE Przekształć wyrażenie.

a) $\frac{5^{\sqrt{7}-5}}{5^{\sqrt{7}}}$ b) $\left(8^{\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)^{\sqrt{2}}$ c) $\left(3^{1+\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} \cdot 3^{-\sqrt{2}}$ d) $2^{4-2\pi} \cdot 4^{\pi}$