21.11.2020r. - matematyka – semestr I – lekcja 1

Temat: Pojęcie logarytmu.

Dla $a > 0$, $b > 0$ i $a \neq 1$ przyjmujemy, że:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Zapis $\log_a b$ czytamy: *logarytm liczby b przy podstawie a.*

liczba logarytmowana

$$\log_a b$$

podstawa logarytmu

PRZYKŁAD 1 Oblicz.

a) $\log_3 81 = 4$, bo $3^4 = 81$

b) $\log_{10} 0{,}001 = -3$, bo $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001$

c) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$, bo $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} = -1$, bo $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

e) $\log_7 7 = 1$, bo $7^1 = 7$

f) $\log_5 1 = 0$, bo $5^0 = 1$

Zadanie 1. Oblicz.

a) $\log_2 4$, $\log_{10} 10\,000$

b) $\log_7 \frac{1}{7}$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$

c) $\log_6 6$, $\log_{\frac{2}{3}} 1$, $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$, $\log_8 1$

d) $\log_5 5^4$, $\log_3 3^{12}$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3^5}$

Z definicji logarytmu wynika, że dla $a > 0$ i $a \neq 1$ zachodzą równości:

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad \log_a a^b = b$$

PRZYKŁAD 2 Oblicz.

$$\log_5 \frac{\sqrt[3]{5}}{125} = \log_5 \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^3} = \log_5 5^{\frac{1}{3} - 3} = \log_5 5^{-2\frac{2}{3}} = -2\frac{2}{3}$$

Zadanie 2. Oblicz.

a) $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{16}$ b) $\log_3 9\sqrt{3}$ c) $\log_5 \frac{25}{\sqrt{5}}$

Gdy trudno jest ustalić wartość logarytmu, można się posłużyć metodą przedstawioną poniżej.

PRZYKŁAD 3 Oblicz $\log_9 27$.

$\log_9 27 = x$ — Szukaną liczbę oznaczamy literą x.

$9^x = 27$ — $\log_a b = x \iff a^x = b$

$(3^2)^x = 3^3$ — Przekształcamy równość tak, aby otrzymać po obu stronach potęgi o tej samej podstawie.

$3^{2x} = 3^3$ — Korzystamy z tego, że jeśli potęgi o tych samych podstawach są równe, to ich wykładniki też są równe.

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

Odp. $\log_9 27 = \frac{3}{2}$

Zadanie 3. Oblicz.

a) $\log_8 \frac{1}{2}$ b) $\log_{\frac{1}{3}} 81$ c) $\log_{25} \sqrt{5}$ d) $\log_{0,1} \sqrt{10}$