

Temat: Rozwiązywanie nierówności.

Rozwiązaniem nierówności nazywamy każdą liczbę, która ją spełnia. Nierówność możemy uważać za rozwiązana, jeżeli określimy zbiór wszystkich jej rozwiązań.

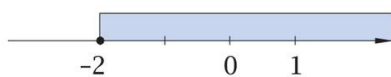
Przy rozwiązywaniu nierówności postępujemy bardzo podobnie jak przy rozwiązywaniu równań. Należy jednak pamiętać, że gdy mnożymy lub dzielimy obie strony nierówności przez liczbę ujemną, musimy zmienić zwrot nierówności na przeciwny.

PRZYKŁAD Rozwiąż nierówność i zaznacz jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

$$\text{a) } -3x + 4 \leq 10 \quad | -4$$

$$-3x \leq 6 \quad | : (-3)$$

$$x \geq -2$$



$$x \in \langle -2; +\infty \rangle$$

Od obu stron odejmujemy 4.

Obie strony dzielimy przez -3 , zmieniamy zwrot nierówności na przeciwny.

Rozwiązaniami nierówności są wszystkie liczby większe od -2 oraz liczba -2 .

Ilustrujemy zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

Rozwiązanie nierówności możemy przedstawić za pomocą przedziału.

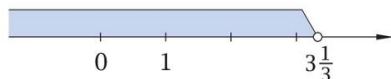
$$\text{b) } \frac{x-1}{2} < \frac{1}{8}x + \frac{3}{4} \quad | \cdot 8$$

$$4(x-1) < x+6$$

$$4x-4 < x+6 \quad | -x+4$$

$$3x < 10 \quad | : 3$$

$$x < 3\frac{1}{3}$$



$$x \in \left(-\infty; 3\frac{1}{3}\right)$$

Mnożymy obie strony przez 8.

Przekształcamy lewą stronę.

Do obu stron dodajemy $-x+4$.

Obie strony dzielimy przez 3.

Rozwiązaniami nierówności są wszystkie liczby mniejsze od $3\frac{1}{3}$.

Ilustrujemy zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

Rozwiązanie nierówności możemy zapisać za pomocą przedziału.

ZADANIE Rozwiąż nierówność.

$$\text{a) } 3(2x-5) < 10x+1$$

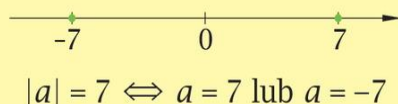
$$\text{b) } \frac{5x-4}{-3} \geq 2x-6$$

Temat: Równania i nierówności z wartością bezwzględną.

Wartość bezwzględna liczby jest zawsze liczbą nieujemną i wyrażenie $|a|$ możemy zinterpretować jako odległość na osi liczbowej liczby a od 0. Rozważmy równanie:

$$|a| = 7$$

Spełniają je liczby, których odległość od 0 jest równa 7, czyli liczby 7 i -7 .



Gdybyśmy w równaniu $|a| = 7$ zastąpili literę a innym wyrażeniem algebraicznym, np. $5 - 3x$, to otrzymalibyśmy równanie, które można również łatwo rozwiązać.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż równanie.

a) $|5 - 3x| = 7$

$$5 - 3x = 7 \quad \text{lub} \quad 5 - 3x = -7$$

$$-3x = 2 \quad \text{lub} \quad -3x = -12$$

$$\underline{x = -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x = 4}$$

b) $3 \cdot |5x - 4| = 0 \quad | : 3$

$$|5x - 4| = 0$$

$$5x - 4 = 0$$

$$\underline{x = \frac{4}{5}}$$

c) $5 \cdot |2x + 3| + 6 = 0 \quad | - 6$

$$5|2x + 3| = -6 \quad | : 5$$

$$|2x + 3| = -\frac{6}{5}$$

Równanie sprzeczne.



⋮ Równanie ma dwa rozwiązania.

⋮ Przekształcamy równanie do postaci $|a| = b$.

⋮ Liczba 0 to jedyna liczba, której wartość bezwzględna jest równa 0.

⋮ Przekształcamy równanie do postaci $|a| = b$.

⋮ Nie ma liczb, których wartość bezwzględna jest ujemna.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $|x + 6| - 8 = 0$

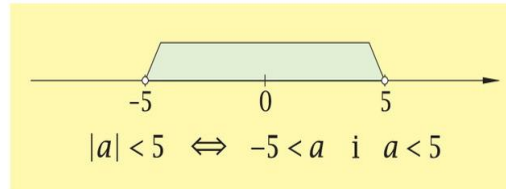
b) $\frac{|4 - 3x|}{-5} = 2$

c) $4 \cdot |2x - 6| + 3 = 3$

Rozważmy nierówność:

$$|a| < 5$$

Tę nierówność spełniają liczby, których odległość od 0 (na osi liczbowej) jest mniejsza od 5.

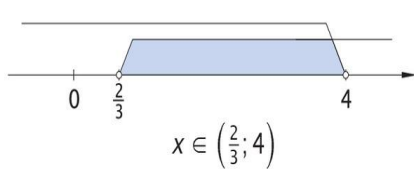


Gdybyśmy w nierówności $|a| < 5$ literę a zastąpili innym wyrażeniem algebraicznym, np. $7 - 3x$, otrzymalibyśmy nierówność $|7 - 3x| < 5$, którą można łatwo rozwiązać.

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż nierówność $|7 - 3x| < 5$.

$$|7 - 3x| < 5$$

$$\begin{array}{l} 7 - 3x > -5 \quad \text{i} \quad 7 - 3x < 5 \\ -3x > -12 \quad \text{i} \quad -3x < -2 \\ x < 4 \quad \text{i} \quad x > \frac{2}{3} \end{array}$$



Zaznaczamy zbiory rozwiązań obu nierówności na osi; wspólna część tych zbiorów to zbiór rozwiązań nierówności $|7 - 3x| < 5$.

ZADANIE Rozwiąż nierówność.

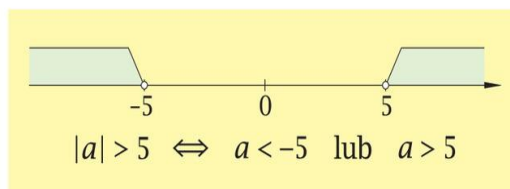
a) $|x - 9| < 4$

b) $|7 + 2x| \leq 3$

Rozważmy teraz nierówność:

$$|a| > 5$$

Spełniają ją te liczby, których odległość od zera (na osi liczbowej) jest większa od 5, a więc liczby mniejsze od -5 , a także liczby większe od 5 .



Zastępując w nierówności $|a| > 5$ literę a innym wyrażeniem, np. $3 - 4x$, otrzymalibyśmy nierówność $|3 - 4x| > 5$, którą można łatwo rozwiązać.

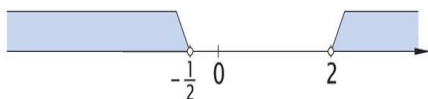
PRZYKŁAD 3 Rozwiąż nierówność $|3 - 4x| > 5$.

$$|3 - 4x| > 5$$

$$3 - 4x < -5 \quad \text{lub} \quad 3 - 4x > 5$$

$$-4x < -8 \qquad -4x > 2$$

$$x > 2 \qquad x < -\frac{1}{2}$$



⋮ Zaznaczamy zbiory rozwiązań obu nierówności na osi; suma tych zbiorów to zbiór rozwiązań nierówności $|3 - 4x| > 5$.

$$\underline{x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(2; +\infty\right)}$$

ZADANIE Rozwiąż nierówność.

a) $|x + 8| \geq 7$

b) $|4 - 3x| > 8$