08.05.2021r. - matematyka – semestr IV A – lekcja1, 2

Temat: Ciągi arytmetyczne.

Ciąg (a_n) nazywamy **arytmetycznym**, jeśli ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego pewnej stałej liczby r. Liczbę r nazywamy **różnicą ciągu**. Ciąg arytmetyczny możemy opisać za pomocą wzoru rekurencyjnego.

Wzór rekurencyjny ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Zauważ, że dla dowolnych dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} ciągu arytmetycznego zachodzi równość $a_{n+1} - a_n = r$.

W ciągu arytmetycznym każdy wyraz (który nie jest ani pierwszym, ani ostatnim) jest równy średniej arytmetycznej dwóch sąsiednich wyrazów. Z tej własności pewnie wzięła się nazwa „ciąg arytmetyczny”.

Jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

08.05.2021r. - matematyka – semestr IV A – lekcja1, 2

P W ciągu arytmetycznym dane są $a_5 = 8$ oraz $a_{12} = -6$. Oblicz a_{50}.

$a_n = a_1 + (n-1)r$ — Zapisujemy wzór ogólny ciągu arytmetycznego.

$$\begin{cases} 8 = a_1 + 4r \\ -6 = a_1 + 11r \end{cases}$$

Korzystając z tego, że $a_5 = 8$ i $a_{12} = -6$, zapisujemy układ równań.

$$\begin{cases} a_1 = 8 - 4r \\ -6 = 8 - 4r + 11r \end{cases}$$

$$7r = -14$$

$$r = -2$$

$$a_1 = 8 - 4r$$

$$a_1 = 8 - 4 \cdot (-2) = 16$$

$a_{50} = 16 + 49 \cdot (-2) = -82$ — Ze wzoru ogólnego wiemy, że $a_{50} = a_1 + 49r$.

P Liczby 5, 1, −3 to trzy początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n). Oblicz sumę $a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{30}$.

$$a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{30} = S_{30} - S_{10}$$

$$a_1 = 5, \quad r = 1 - 5 = -4$$

$$a_n = 5 + (n-1) \cdot (-4)$$

$$a_{30} = 5 + 29 \cdot (-4) = -111 \qquad a_{10} = 5 + 9 \cdot (-4) = -31$$

$$S_{30} = \frac{5 - 111}{2} \cdot 30 = -1590 \qquad S_{10} = \frac{5 - 31}{2} \cdot 10 = -130$$

Szukana suma wynosi $S_{30} - S_{10} = -1590 - (-130) = -1460$.

08.05.2021r. - matematyka – semestr IV A – lekcja1, 2

Temat: Ciągi geometryczne.

Ciąg (a_n) nazywamy **geometrycznym**, jeśli ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje w wyniku pomnożenia poprzedniego wyrazu przez pewną stałą liczbę q. Liczbę q nazywamy **ilorazem ciągu**. Ciąg geometryczny można opisać za pomocą wzoru rekurencyjnego.

Wzór rekurencyjny ciągu geometrycznego o ilorazie q:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Zauważ, że dla dowolnych dwóch kolejnych (niezerowych) wyrazów a_n i a_{n+1} ciągu geometrycznego zachodzi równość $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Średnią geometryczną dwóch liczb nieujemnych a i b nazywamy liczbę $\sqrt{a \cdot b}$. Łatwo wykazać, że w ciągu geometrycznym o wyrazach nieujemnych każdy wyraz (który nie jest pierwszym ani ostatnim wyrazem ciągu) jest równy średniej geometrycznej sąsiednich wyrazów.

W ciągu geometrycznym (a_n) o wyrazach nieujemnych:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Tej własności ciąg geometryczny zawdzięcza zapewne swą nazwę.

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

W ciągu geometrycznym o pierwszym wyrazie równym 2 piąty wyraz jest o 40 większy od trzeciego. Znajdź wzór ogólny tego ciągu.

$a_5 = a_3 + 40$ — Równość wynika z warunków zadania.

$2q^4 = 2q^2 + 40$ — Korzystamy z tego, że $a_5 = a_1 q^4 = 2q^4$ oraz $a_3 = a_1 q^2 = 2q^2$.

$q^4 - q^2 - 20 = 0$

Niech $q^2 = t$, wówczas $t^2 - t - 20 = 0$.

$$\Delta = 1 + 80 = 81$$

$t_1 = \frac{1+9}{2} = 5$ $\qquad$ $t_2 = \frac{1-9}{2} = -4$

$q^2 = 5$ lub $q^2 = -4$

$q = \sqrt{5}$ lub $q = -\sqrt{5}$ $\qquad$ równanie sprzeczne

$a_n = 2(\sqrt{5})^{n-1}$ lub $a_n = 2(-\sqrt{5})^{n-1}$ — Dwa ciągi spełniają warunki zadania.

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Składniki poniższej sumy są wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz tę sumę.

$4 + 12 + 36 + \ldots + 4 \cdot 3^{10}$

$a_1 = 4, \quad a_n = 4 \cdot 3^{10}, \quad q = \frac{12}{4} = 3$ — Korzystamy z równości $q = \frac{a_2}{a_1}$.

$4 \cdot 3^{10} = 4 \cdot 3^{n-1}$

$10 = n - 1$

$n = 11$

Ustalamy, którym wyrazem ciągu jest wyraz $4 \cdot 3^{10}$, korzystając ze wzoru $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$$S_{11} = 4 \cdot \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = 4 \cdot \frac{1 - 177\,147}{-2} = 354\,292$$