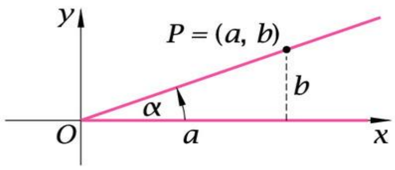
07.03.2021r. - matematyka – semestr IV A – lekcja1, 2

Temat: Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta.



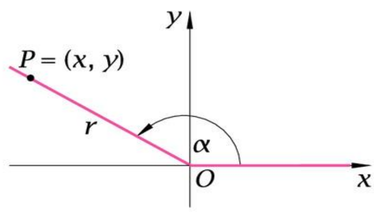
$$\sin\alpha = \frac{b}{|OP|} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{|OP|}$$

Jeżeli kąt ostry α umieścimy w układzie współrzędnych (tak jak na rysunku obok) i na ramieniu końcowym tego kąta obierzemy punkt $P = (a, b)$ różny od $(0, 0)$, to będziemy mogli zapisać funkcje trygonometryczne kąta α za pomocą współrzędnych punktu P (tzn. liczb a i b) oraz długości odcinka OP. Taką interpretację można wykorzystać do określenia funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta.

Niech α będzie dowolnym kątem umieszczonym w układzie współrzędnych (wierzchołek kąta α leży w punkcie $(0, 0)$, a początkowe ramię na nieujemnej części osi x).

Wybieramy na końcowym ramieniu kąta α punkt P różny od wierzchołka kąta. (Przypomnijmy, że pierwszą współrzędną punktu w układzie współrzędnych nazywamy odciętą, a drugą — rzędną).



$$|OP| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej punktu P do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

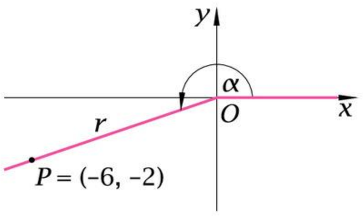
Jeśli odcięta punktu P jest różna od zera, to **tangensem** kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odciętej tego punktu.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

Definicje funkcji trygonometrycznych pozwalają obliczać wartości tych funkcji dla kątów innych niż ostre. Z definicji tych wynika, że $\operatorname{tg}\alpha$ może być dowolną liczbą, a $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ to liczby z przedziału $\langle -1; 1\rangle$, gdyż dla dowolnego punktu $P = (x, y)$ zachodzą nierówności $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ i $|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$.



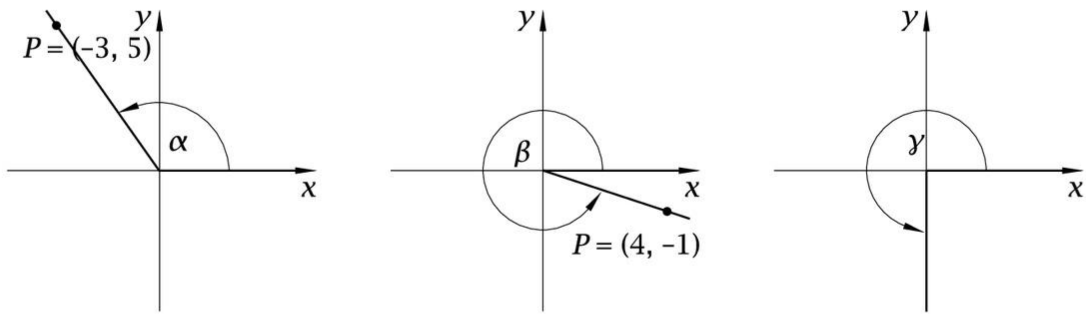
$r = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$

Na rysunku zaznaczono kąt α, którego końcowe ramię przechodzi przez punkt $(-6, -2)$. Z definicji funkcji trygonometrycznych wynika, że:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{10}} = \frac{-\sqrt{10}}{10} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-6}{2\sqrt{10}} = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$$

B Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α, β i γ.



07.03.2021r. - matematyka – semestr IV A – lekcja1, 2

Temat: Podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi.

Tożsamości te zachodzą nie tylko dla kątów ostrych, ale także dla wszystkich kątów, dla których określone są odpowiednie funkcje trygonometryczne.

Pierwsza z równości, zwana jedynką trygonometryczną, zachodzi dla wszystkich kątów. Druga równość prawdziwa jest dla kątów, których tangens jest określony.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

P Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$, wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{2}{7}$.

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{49}$$

Obliczamy wartość cosinusa, korzystając z tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$\cos\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7} \quad \text{lub} \quad \cos\alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3\sqrt{5}}{7}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15} \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{-3\sqrt{5}}{7}} = -\frac{2\sqrt{5}}{15}$$

P Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = -5$ i $90° < \alpha < 180°$, oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -5, \quad \text{więc} \quad \sin\alpha = -5\cos\alpha$$

Korzystamy z tożsamości $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

$$(-5\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej.

$$25\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{26}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{26}}{26} \quad \text{lub} \quad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{26}}{26}$$

$$\cos\alpha < 0, \quad \text{więc} \quad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{26}}{26}$$

Z warunku $90° < \alpha < 180°$ wynika, że $\cos\alpha < 0$.

$$\sin\alpha = -5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{26}}{26}\right) = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

Wcześniej ustaliliśmy, że $\sin\alpha = -5\cos\alpha$.

07.03.2021r. - matematyka – semestr IV A – lekcja1, 2

1. a) Oblicz $\sin\alpha$, gdy $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

b) Oblicz $\cos\alpha$, gdy $\sin\alpha = -0{,}8$.

c) Oblicz $\sin\alpha$, gdy $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$ i $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.

d) Oblicz $\cos\alpha$, gdy $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ i $-270^\circ < \alpha < -180^\circ$.