Matematyka LO IVA -14.06.2020r. 2 godziny

Temat 1, 2: Rozwiązywanie zadań z ciągu arytmetycznego i geometrycznego:

<u>Przypomnienie wzorów:</u>

Ciąg arytmetyczny:

1) Wzór na n-ty wyraz: $a_n = a_1 + (n-1) * r$
2) Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu: $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} * n$

   lub $S_n \frac{a_1+a_1+(n-1)*r}{2} * n$

   $$S_n \frac{2a_1 + (n-1) * r}{2} * r$$
3) Jeżeli mamy 3 kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: *(x, y, z),* to $y = \frac{x+z}{2}$

   środkowy wyraz jest średnią arytmetyczną 2 pozostałych.

Ciąg geometryczny:

1) Wzór na n-ty wyraz: $a_n = a_1 * q^{n-1}$
2) Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu:

$$S_n = \begin{cases} a_1 * n & q = 1 \\ a_1 * \dfrac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$$

3) Jeżeli mamy wyrazy ciągu geometrycznego:

   $(a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1})$ (oprócz 1-go i ostatniego wyrazu ciągu)

   $to\ \ a_n^2 = a_{n-1} * a_{n+1},$

   oznacza, że środkowy wyraz jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich, możemy to zapisać: $a_n\sqrt{a_{n-1} * a_{n+1}}$

Rozwiązywanie zadań:

Zadanie 1. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do 1000.

Mamy ciąg *(1, 2, 3, 4 … 1000)* jest to ciąg arytmetyczny: $a_1 = 1, a_{1000} = 1000, r = 1$

Stosujemy wzór na sumę S_{1000},

$$S_{1000} = \frac{a_1 + a_{1000}}{2} * n$$

$$S_{1000} = \frac{1+1000}{\cancel{2}} * \overset{500}{\cancel{1000}} = 1001 * 500 = 500500$$

Zadanie 2. Ósmy wyraz ciągu arytmetycznego wynosi 37, jedenasty $a_{11} = 52$. Oblicz wyraz 20-ty.

Mamy: $a_8 = a_1 + 7r = 37$ szukamy $a_{20} = ?$

$$a_{11} = a_1 + 10r = 52$$

$$\begin{cases} a_1 + 7r = 37 \\ \underbrace{a_1 + 10}_{} = 52 \end{cases} \text{ utworzyliśmy układ równań:}$$

$$\underbrace{a_1 + 7r}_{37} + 3r = 52$$

Mamy: *37+3r=52*

3r = 52 – 37 = 15 , r = 5

Z równania np. 2-go mamy: $a_1 + 10 * 5 = 52$

$$a_1 = 52 - 50 = 2$$

$$a_{20} = a_1 + 19r$$

$$a_{20} = 2 + 19 * 5 = 2 + 95 = \mathbf{97}$$

Zadanie 3. Znaleźć *x, y* tak, żeby *(28, x, y, 52)* był ciągiem arytmetycznym.

Mamy: $a_1 = 28,\ a_2 = x,\ a_3 = y,\ a_4 = 52$

Korzystamy z tego, że $a_4 = a_1 + 3r$

$$52 = 28 + 3r$$

$3r = 52 - 28 = 24$ $3r = 24,\ \boldsymbol{r = 8}$

$x = 28 + 8 = 36,\ \ bo\ (a_2 = a_1 + r)$

$y = 36 + r,\ \ bo\ (a_3 = a_2 + r)$

$$y = 36 + 8 = 44$$

Mamy ciąg *(28, 36, 44, 52)*

Zadanie 4. Dla jakiej liczby dodatniej *x*, ciąg *(25, x, 100)* jest geometryczny.

Korzystamy z 3-go wzoru w/w na ciąg geometryczny.

$$x^2 = 25 * 100$$

$$x = \sqrt{25 * 100} = \sqrt{2500} = \mathbf{50}$$

Zadanie 5. Dane są trzeci i piąty wyraz ciągu geometrycznego $a_3 = \frac{20}{9}, a_5 = \frac{80}{81}$. oblicz pierwszy wyraz iloraz *q.*

Ponieważ $a_3 = a_1 * q^2 \quad i \quad a_5 = a_1 * q^4$ mamy:

$\frac{20}{9} = a_1 * q^2$

jeżeli podzielimy $\frac{a_5}{a_3}$, to mamy:

$$\frac{80}{81} = a_1 * q^4$$

$$\frac{\cancel{a_1}q^4}{\cancel{a_1}q^2} = q^2$$

$$\frac{80}{81} : \frac{20}{9} = \frac{\overset{4}{\cancel{80}}}{\underset{9}{\cancel{81}}} * \frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{20}}} = \frac{4}{9}$$

$q^2 = \frac{4}{9}$

$$q^2 - \frac{4}{9} = 0 \qquad \left(q - \frac{2}{3}\right)\left(q + \frac{2}{3}\right) = 0$$

$q_1 = \frac{2}{3}, \qquad q_2 = -\frac{2}{3}$

Znając *q* obliczamy: a_1

dla $q = \frac{2}{3}$

$a_3 = a_1 * q^2$

$$\frac{20}{9} = a_1 * \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\frac{20}{9} = \frac{4}{9} * a_1, \qquad a_1 = \frac{20}{9} : \frac{4}{9} = \frac{20}{\cancel{9}} * \frac{\cancel{9}}{4} = \mathbf{5}$$

dla $q = \frac{2}{3}$ mamy $a_1 = 5$ (1)

dla $q = \frac{-2}{3}$

$a_3 = a_1 * \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$$\frac{20}{9} = a_1 * \frac{4}{9}, \qquad a_1 = \frac{20}{\cancel{9}} * \frac{\cancel{9}}{4} = 5$$

$$q = \frac{-2}{3} \quad a_1 = 5$$

Mamy 2 pary rozwiązań:

I. $q = \frac{2}{3},\ a_1 = 5$

II. $q = \frac{-2}{3},\ a_1 = 5$