Matematyka LO IVA 13.06.2020r.

Temat 1.: Ciąg geometryczny – własności.

Definicja: **Ciąg(a_n) nazywamy ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego wyraz oprócz pierwszego jest iloczynem poprzedniego i tej samej pewnej liczby *q*.**

Liczbę *q* nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego.

Ciąg geometryczny może być skończony lub nieskończony.

Ciąg skończony musi mieć co najmniej 3 wyrazy.

Aby wyznaczyć ciąg geometryczny, należy znać jego pierwszy wyraz i iloraz *q*.

Przykłady:

(2, -2, 2, -2 …) $a_1 = 2 \quad q = -1, \ a_2 = -2, \ a_3 = 2, \ a_4 = -2$

(-2, -2, -2 …) $a_1 = -2 \quad q = 1, \quad a_2 = -2, \ a_3 = -2$

(3, 6, 12, 24 …) $a_1 = 3 \quad q = 2, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 12, \ a_4 = 24$

Zgodnie z definicją:

$a_{2=}a_1 * q, \qquad a_3 = a_2 * q, \quad a_{4=}a_3 * q \quad itd.$

Twierdzenie: **Jeżeli a_n jest ciągiem geometrycznym o ilorazie *q*, gdzie $q \neq o$, to dla każdej liczby dodatniej naturalnej *n* zachodzi równość:**

$$\boldsymbol{a_n = a_1 * q^{n-1}}$$

Jest to wzór na ogólny wyraz ciągu geometrycznego.

Przykład 1.

$a_1 = 2 \quad q = -3$

Oblicz: $a_2, \ a_4\,, \ a_6$

$a_2 = a_1 * q = 2 * (-3) = -6$

$a_4 = a_1 * q^3 = 2 * (-3)^3 = 2 * (-27) = -54$

$a_6 = a_1 * q^5 = 2 * (-3)^5 = 2 * (-243) = -486$

Przykład 2.

Jeżeli dany jest ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_1 = \sqrt{2}, \ \ q = \frac{1}{5},$ to:

$a_n = \sqrt{2} * (\frac{1}{5})^{n-1}$

np.: $a_4 = \sqrt{2} * (\frac{1}{5})^3 = \sqrt{2} * \frac{1}{125} = \frac{\sqrt{2}}{125}$

Twierdzenie: **W każdym ciągu geometrycznym kwadrat dowolnego jego wyrazu (oprócz pierwszego i ostatniego, gdy ciąg jest skończony) – jest iloczynem dwóch wyrazów sąsiednich (poprzedniego i następnego) ($\boldsymbol{a_{n-1}}, \boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{a_{n+1}}$)** $\boldsymbol{a_n^2 = a_{n-1} * a_{n+1}}$
np. $\boldsymbol{a_3 = 4}$, $\boldsymbol{a_4 = x}$, $\boldsymbol{a_5 = 10}$

wtedy zgodnie z twierdzeniem $x^2 = 4 * 10 = 40$

$$x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Zadanie 1.

Dane są wyrazy ciągu geometrycznego *(9, x, 81).* Wyznacz x.

Korzystamy z twierdzenia: $a_n^2 = a_{n-1} * a_{n+1}$

czyli: $x^2 = 9 * 81$

$x^2 = 729$, $x = \sqrt{729}$, $x = 27$

Jest to ciąg: *(9, 27, 81)*

Wzór: $a_n^2 = a_{n-1} * a_{n+1}$ możemy zapisać:

$a_n = \sqrt{a_{n-1} * a_{n+1}}$

Temat 2.

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Twierdzenie: **Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to sumę $\boldsymbol{S_n}$ jego początkowych wyrazów obliczamy:**

$$\boldsymbol{S_n = \begin{cases} n * a_1 & q = 1 \\ a_1 * \dfrac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}}$$

Jeżeli *q = 1*, mamy ciąg:

(2, 2, 2, 2, 2 …)

Aby policzyć sumę, musimy wyrazy dodać:

*2 + 2 + 2 + 2 + …   = n * 2*

Przykład: Oblicz sumę 10 początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = 2, q = 2$.

Stosujemy wzór: $S_n = a_1 * \frac{1-q^n}{1-q}$, ponieważ $q \neq 1$

$$S_n = 2 * \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2 * \frac{1-2^{10}}{-1} = -2(1-2^{10}) = 2(2^{10}-1)$$

Zadanie 1. Wyznacz $a_1$ciągu geometrycznego (a_n)

Jeżeli $q = 3 \quad i \quad S_5 = 363$

Stosuję wzór na sumę:

$$S_5 = a_1 * \frac{1-q^5}{1-q} = 363$$

$$363 = \frac{1-3^5}{1-3} * a_2, \quad 363 = \frac{1-243}{-2} * a_1$$

$$363 = a_1 * \frac{-242}{-2}$$

$$363 = a_1 * 121$$

$$a_1 = \frac{363}{121} = 3$$

Ciąg $(a_n):\quad a_1 = 3, \quad q = 3$

Zdanie 2. Wyznacz a_1 ciągu geometrycznego (a_n) jeżeli $q = 3, \quad s_5 = 121$

Stosując wzór na sumę:

$$S_5 = a_1 * \frac{1-q^5}{1-q}$$

$$121 = a_1 * \frac{1-3^5}{1-3}$$

$$121 = a_1 * \frac{1-243}{-2}$$

$$121 = a_1 * \frac{-242}{-2}$$

$$121 = a_1 * 121$$

$$a_1 = \frac{121}{121} = 1$$

$a_1 = 1$