Matematyka sem.IVA 07.06.2020r. 3 godziny

Temat 1.: Ciągi liczbowe

Definicja: **Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję, która odwzorowuje zbiór N_+liczb naturalnych dodatnich w pewien niepusty zbiór A.**

Możemy to zapisać: $f: N_+ \rightarrow A$

Wartości tej funkcji nazywamy wyrazami ciągu.

Ciągi nieskończone nazywamy liczbowymi, gdy jego wyrazy są liczbami.

Ciągi oznaczamy $(a_n), (b_n) \dots$

Funkcję $f: \{1,2,3 \dots k\} \rightarrow R$ nazywamy ciągiem skończonym k-wyrazowym.

Liczby $(1,2,3 \dots n \dots)$nazywamy wskaźnikami.

Każdy ciąg skończony ma wyraz pierwszy i ostatni.

Ciąg nieskończony ma wyraz pierwszy lecz nie ma ostatniego.

Ciągi podajemy najczęściej za pomocą:

Zapisu słownego lub wzoru ogólnego, wzoru rekurencyjnego (aby obliczyć jakiś wyraz, należy znać wyrazy poprzednie)

<u>Monotoniczność ciągu</u>

Funkcja f jest monotoniczna w zbiorze R, gdy jest w tym zbiorze rosnąca lub malejąca.

Definicja: **Ciąg $(\boldsymbol{a_n})$nazywamy rosnącym, gdy każdy jego wyraz jest mniejszy od wyrazu następującego po nim, czyli gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n spełniona jest nierówność: $\boldsymbol{a_{n+1} > a_n}$**

Definicja: **Ciąg $(\boldsymbol{a_n})$ nazywamy malejącym, gdy każdy jego wyraz jest większy od wyrazu następującego po nim, czyli gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n spełniona jest nierówność: $\boldsymbol{a_n > a_{n+1}}$**

Ciągi rosnące i malejące nazywamy monotonicznymi.

Aby zbadać, czy ciąg jest rosnący, czy malejący należy sprawdzić różnicę: $a_{n+1} - a_n$

Jeżeli jest dodatnia, ciąg jest rosnący, jeżeli jest ujemna, ciąg jest malejący

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n > 0 - ciąg\ rosnący \\ a_{n+1} - a_n < 0 - ciąg\ malejący \end{cases}$$

Przykład 1.

Zbadaj monotoniczność ciągu $a_n = \frac{2n-1}{n}$

Budujemy ciąg a_{n+1}

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = \frac{2n+2-1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}$$

Obliczamy różnicę:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \frac{(2n+1)*n}{(n+1)*n} - \frac{(2n-1)(n+1)}{(n+1)*n} =$$

Sprowadzam do wspólnego mianownika

$$= \frac{2n^2+n-(2n^2+2n-n-1)}{(n+1)*n} = \frac{2n^2+n-2n^2-n+1}{(n+1)*n} = \frac{1}{(n+1)*n}, n \in N+$$

Czyli $\frac{1}{(n+1)*n} > 0$ ciąg (a_n) jest rosnący

Przykład 2.

Wykaż, ze ciąg b_n określony wzorem:

$b_n = \frac{n+2}{2n+1}$ jest malejący

Sprawdzamy różnicę $b_{n+1} - b_n$

$$b_{n+1} = \frac{n+1+2}{2(n+1)+1} = \frac{n+3}{2n+3}$$

Obliczamy różnicę:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n+3}{2n+3} - \frac{n+2}{2n+1} = \frac{(n+3)(2n+1)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{(n+2)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$\frac{2n^2+n+6n+3-(2n^2+3n+4n+6)}{(2n+3)(2n+1)} =$$

Liczba ujemna

$$\frac{\cancel{2n^2}+7\cancel{n}+3-\cancel{2n^2}-7\cancel{n}-6}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{-3}{(2n+3)(2n+1)} < 0$$

liczba dodatnia **jest to ciąg malejący**

Temat 2. Ciąg arytmetyczny

Definicja: **Ciąg, w którym różnica miedzy dowolnym wyrazem i wyrazem bezpośrednio go poprzedzającym jest stała dla danego ciągu, nazywamy ciągiem arytmetycznym.**

Różnicę oznaczamy r

$a_{n+1} - a_n = r$

np:

I.

1, 2, 3, 4, 5… r = 1

a_1 a_2 a_3

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = r = 1$

II.

4, 2, 0, -2, -4 …

$2 - 4 = 0 - 2 = -2 - 0 = -4 - (-2) = -2 \quad r = -2$

III.

1, 1, 1, 1, 1 . . .

$1 - 1 = 1 - 1 = 1 - 1 = 0 \qquad r = 0$

Różnica r ciągu arytmetycznego może być dodatnia, ujemna, zero

<u>Wniosek:</u>

Ciąg arytmetyczny o różnicy r jest:

rosnący, gdy r > 0

malejący, gdy r < 0

stały, gdy r = 0

Zadanie 1.

Niech a_1 ciągu arytmetycznego (a_1) wynosi 2, r = 3. Wyznacz pięć kolejnych wyrazów.

Rozwiązanie:

$a_1 = 2 \quad r = 3$

$a_2 = 2 + 3 = 5$

$a_3 = 5 + 3 = 8$

$a_4 = 8 + 3 = 11$

$a_5 = 11 + 3 = 14$

$a_6 = 14 + 3 = 17$

Mamy ciąg: 2, 5, 8, 11, 14, 17 …

Zadanie 2. Wyznacz 20-ty wyraz ciągu arytmetycznego, jeżeli: $a_1 = 5, \ \ r = 2$

Aby wyznaczyć a_{20} skorzystamy ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego.

Twierdzenie**: Dla Każdej dodatniej liczby naturalnej n, zachodzi wzór:**

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) * r}$$

Zapisujemy:

$a_{20} = 5 + (20 - 1) * 2$

$a_{20} = 5 + 19 * 2$

$a_{20} = 5 + 38 = 43$

Zadanie 2. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_1 = -2 \quad r = 5$

Oblicz a_{200}

$a_{200} = a_1 + (n-1) * r$

$a_{200} = -2 + 199 * 5$

$a_{200} = -2 + 995 = 993$

Temat 3. Suma n pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Twierdzenie: **Ciąg (a_n)jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi wzór:**

$S_n \frac{a_1+a_n}{2} * n$ (1)

S_n- nazywamy n-tą sumą częściową ciągu (a_n) jeżeli w S_n wyraz a_n zastąpimy:

$a_n = a_1 + (n-1) * r$ to otrzymamy $S_n = \frac{a_1+a_1+(n-1)*r}{2} * n =$

$\frac{2a_1+(n-1)*r}{2} * n$ **(2)**

Na obliczenie sumy n pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego możemy stosować wzór (1) lub (2).

Zadanie 1. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do 1000. Jest to ciąg arytmetyczny liczb: 1, 2, 3, … 1000

$$a_1 = 1, \quad n = 1000, \; a_{1000} = 1000$$

Stosujemy wzór (1)

$$S_{1000} = \frac{1 + 1000}{\cancel{2}} * \overset{500}{\cancel{1000}} = 1001 * 500 = 500500$$

Zadanie 2. Oblicz sumę 20 pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego o wzorze ogólnym $a_1 = 3n + 1$

Obliczam $a_1 = 3 * 1 + 1 = 4$

Obliczam $a_1 = 3 * 20 + 1 = 61$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} * 20 = \frac{4 + 61}{\cancel{2}} * \overset{10}{\cancel{20}} = 65 * 10 = 650$$

Zadanie 3. Oblicz samodzielnie:

Między liczby (28, 52) wstaw x, y tak, aby ciąg (28, x, y, 52) był ciągiem arytmetycznym.

Następne zajęcia: 13.06 i 14.06.2020r.