Matematyka V i Va **05.12.2020 - 06.12. 2020**

<u>Temat:</u> Bryły podobne (1h)

<u>Wykład</u>

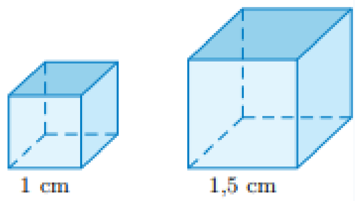
https://www.youtube.com/watch?v=8wO0xoTbcDE

https://www.youtube.com/watch?v=_Y6m9ZY-QwE

<u>Notatka</u>

4.14. Bryły podobne

Dwie bryły są **podobne**, jeśli odległości między punktami jednej bryły są proporcjonalne do odległości między odpowiednimi punktami drugiej bryły. Stosunek odległości między odpowiednimi punktami brył podobnych nazywamy **skalą podobieństwa**.

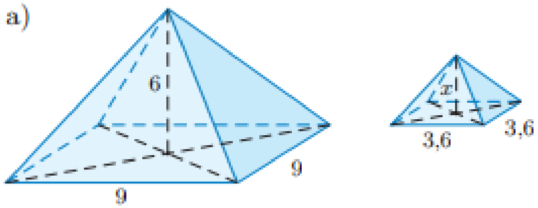


Na przykład dowolne dwa sześciany są podobne. Na rysunku powyżej skala podobieństwa większego sześcianu do mniejszego wynosi $\frac{3}{2}$, co możemy też zapisać $3:2$.

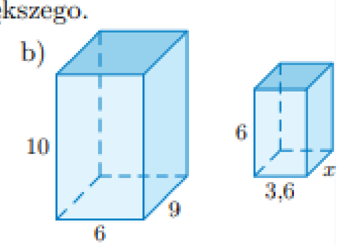
Ćwiczenie 1

Na rysunkach przedstawiono wielościany podobne. Wyznacz x oraz podaj skalę podobieństwa mniejszego wielościanu do większego.

a)



b)



Ćwiczenie 1

a) $\frac{x}{6} = \frac{3,6}{9}$, czyli $x = 2,4$

skala podobieństwa: $k = \frac{2}{5}$

b) $\frac{x}{9} = \frac{6}{10}$, czyli $x = 5,4$

skala podobieństwa: $k = \frac{3}{5}$

> Jeśli skala podobieństwa brył podobnych jest równa $a:b$, to stosunek pól powierzchni tych brył jest równy $a^2:b^2$, a stosunek objętości $a^3:b^3$.

Ćwiczenie 2

a) Dane są dwa sześciany. Pole powierzchni pierwszego jest czterokrotnie większe od pola powierzchni drugiego. Jaki jest stosunek objętości tych sześcianów?

b) Dane są dwie kule. Objętość pierwszej jest równa 36π cm^3, a druga ma promień dwa razy dłuższy od promienia pierwszej kuli. Oblicz objętość drugiej kuli. Jaki jest stosunek ich pól powierzchni?

Ćwiczenie 2

a) $\frac{P_1}{P_2} = \frac{4}{1} = k^2$, czyli $k = 2$

Zatem $\frac{V_1}{V_2} = k^3 = \frac{8}{1}$

b) $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2} = k$

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{36\pi}{V_2} = k^3 = \frac{1}{8}$,

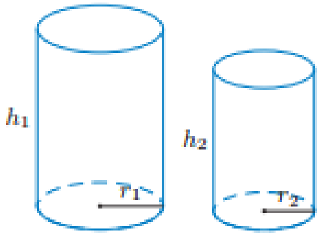
czyli $V_2 = 288\pi$ cm^3

$\frac{P_1}{P_2} = k^2 = \frac{1}{4}$

1. Promienie podstaw dwóch walców oraz ich wysokości są równe odpowiednio: r_1, h_1 i r_2, h_2. Sprawdź, czy te walce są podobne.

a) $r_1 = 20$ cm, $h_1 = 24$ cm, $r_2 = 12$ cm, $h_2 = 15$ cm

b) $r_1 = 12$ cm, $h_1 = 16$ cm, $r_2 = 9$ cm, $h_2 = 12$ cm



1. a) $\frac{r_1}{r_2} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} \neq \frac{5}{3}$

Bryły nie są podobne.

b) $\frac{r_1}{r_2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

Bryły są podobne.

Temat: Reguła mnożenia. Reguła dodawania (2h)

Wykład

https://www.youtube.com/watch?v=sF4ZKHIfcMg

Notatka

Przykład 1

Rzucamy dwiema monetami: dwuzłotówką i pięciozłotówką. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.

Niech o oznacza otrzymanie orła, a r – reszki na monecie dwuzłotowej, natomiast O – orła, a R – reszki na monecie pięciozłotowej. Możliwe wyniki doświadczenia to:

$$oO,\ oR,\ rO,\ rR$$

Przykład 2

Rzucamy dwiema kostkami: niebieską i czerwoną. Ile jest możliwych wyników tego doświadczenia?

Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki:

1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

Kiedy piszemy o kostce, mamy na myśli sześcienną kostkę do gry.

Przyjmujemy, że wynikiem jednokrotnego rzutu kostką jest liczba otrzymanych oczek, a wynikiem rzutu dwiema kostkami – para liczb.

Wszystkich możliwych wyników jest 36 (zwróć uwagę, że rozróżniamy wyniki takie jak np. 23 i 32).

Przykład 3

Niech A będzie zbiorem wszystkich liczb pierwszych mniejszych od 10, B – zbiorem wszystkich liczb pierwszych mniejszych od 20. Ile jest par (x, y) takich, że $x \in A$ i $y \in B$?

$A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, zatem $\overline{\overline{A}} = 4$, $\overline{\overline{B}} = 8$.

Liczba opisanych par jest równa $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = 4 \cdot 8 = 32$.

Przykład 4

Ile może być numerów rejestracyjnych mających na początku dwie litery, a następnie pięć cyfr, jeśli mogą w nich występować jedynie litery W, E oraz cyfry: 1, 3, 8, 9 (litery i cyfry mogą się powtarzać)?

Takich numerów jest: $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$.

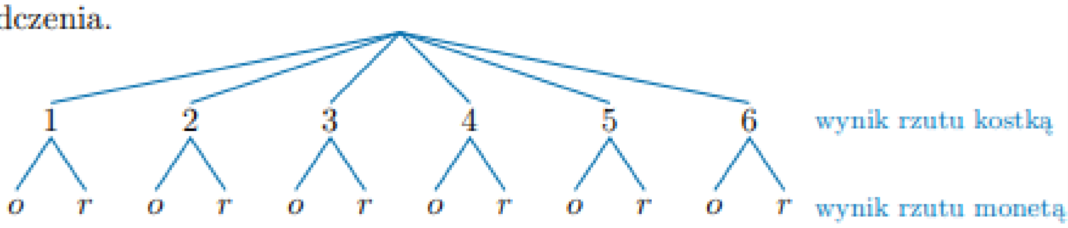
Przykład 5

Rzucono kostką i monetą. Przyjmujemy, że wynikiem doświadczenia jest para (a, b), gdzie a jest liczbą oczek na kostce, a b – orłem lub reszką. Ile jest możliwych wyników takiego doświadczenia?

Zbiorem możliwych wyników rzutu kostką jest zbiór $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Zbiorem możliwych wyników rzutu monetą jest zbiór $B = \{o, r\}$, gdzie o oznacza wypadnięcie orła, a r – reszki.

$\overline{\overline{A}} = 6$ oraz $\overline{\overline{B}} = 2$, więc wszystkich możliwych wyników jest $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = 12$.

Poniżej przedstawiamy drzewo ilustrujące wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.



Wynikami tego doświadczenia są: $(1, o)$, $(1, r)$, $(2, o)$, $(2, r)$, $(3, o)$, $(3, r)$, $(4, o)$, $(4, r)$, $(5, o)$, $(5, r)$, $(6, o)$, $(6, r)$.

3. Ile jest możliwych kodów, w których na początku występują trzy litery, a następnie cztery cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli wykorzystujemy:
a) litery: A, B, C oraz cyfry: 1, 2, 3, 4;
b) litery: A, B, C, D oraz cyfry: 1, 2, 3, 4, 5, 6?

3. a) $3^3 \cdot 4^4 = 6912$
b) $4^3 \cdot 6^4 = 82944$

4. W restauracji serwuje się 5 różnych zup, 8 – drugich dań i 6 – deserów. Ile różnych zestawów obiadowych, składających się z zupy, drugiego dania i deseru, można zamówić w tej restauracji?

4. $5 \cdot 8 \cdot 6 = 240$

5. Na ile sposobów może się ubrać pani, która ma 3 różne kapelusze, 6 sukni i 4 pary butów?

5. $3 \cdot 6 \cdot 4 = 72$

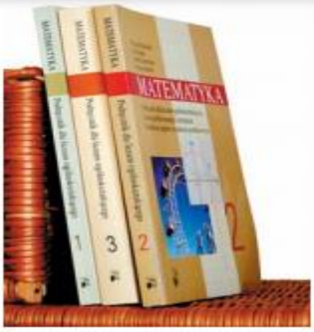
Temat: Permutacje (1h)

Wykład

https://www.youtube.com/watch?v=92KPhyyfqak

Notatka

1.2. Permutacje



Przykład 1
Na ile sposobów można ustawić na półce trzy różne książki?

Oznaczamy książki numerami: 1, 2, 3 i wypisujemy wszystkie możliwe ustawienia:

123 132 213 231 312 321

Trzy książki możemy ustawić na 6 sposobów.

Przykład 2
Na ile sposobów można ustawić na półce cztery różne książki?

Oznaczamy książki numerami: 1, 2, 3, 4 i wypisujemy wszystkie możliwe ustawienia:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Otrzymaliśmy 24 możliwe ustawienia książek.

W przykładzie 1. podaliśmy wszystkie trzywyrazowe ciągi, które można utworzyć, przestawiając liczby: 1, 2, 3, a w przykładzie 2. – wszystkie czterowyrazowe ciągi, które można utworzyć, przestawiając liczby: 1, 2, 3, 4. Takie ciągi nazywamy **permutacjami**.

Przykład 3

Na ile sposobów można ustawić na półce pięć różnych książek?

Należy odpowiedzieć na pytanie, ile jest permutacji zbioru pięcioelementowego $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Najpierw wybieramy jedną spośród pięciu książek i ustawiamy na pierwszym miejscu. Następnie jedną z czterech pozostałych książek ustawiamy na drugim miejscu – możemy to zrobić na 4 sposoby, następnie wybieramy jedną z trzech pozostałych książek itd. Możliwych ustawień jest więc:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

1. a) Ile liczb pięciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 56 789?

b) Ile liczb sześciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 245 768?

2. a) Ile jest liczb dziewięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0 i żadna cyfra się nie powtarza?

b) Ile liczb pięciocyfrowych można utworzyć z cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, jeśli cyfry nie mogą się powtarzać?

1. a) $5! = 120$

b) $6! = 720$

2. a) $9! = 362\,880$

b) $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$

4. a) $n! = 5040$ dla $n = 7$

b) $720 = 6!$ – 6 numerów nieparzystych

Zatem jest 11 lub 12 zawodników.

4. a) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do n. Ilu jest zawodników, jeśli numery startowe możemy przydzielić na 5040 sposobów?

b) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do n. Najpierw rozdano numery parzyste, po czym okazało się, że numery nieparzyste można przydzielić na 720 sposobów. Ilu jest zawodników?