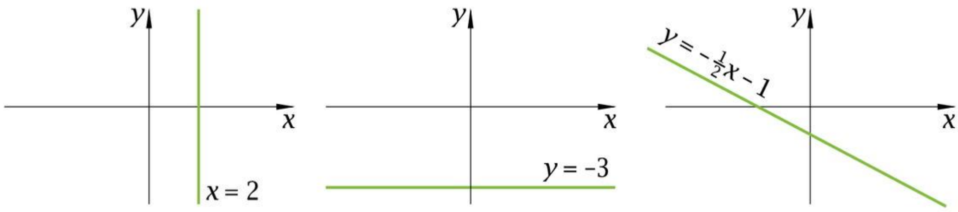
06.02.2021r. - matematyka – semestr I – lekcja 1, 2

Temat: Równanie prostej.

Warunek, który spełniają współrzędne punktów leżących na prostej, można zapisać za pomocą równania. Gdy prosta jest prostopadła do osi x, równanie ma postać $x = d$; gdy jest prostopadła do osi y, równanie ma postać $y = b$. W pozostałych przypadkach równanie możemy zapisać w postaci $y = ax + b$, gdzie $a \neq 0$.



Każde z równań podanych powyżej można przedstawić w innej postaci:

$x = 2$	$y = -3$	$y = -\frac{1}{2}x - 1$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$x + 0 \cdot y - 2 = 0$	$0 \cdot x + y + 3 = 0$	$x + 2y + 2 = 0$

Dla dowolnej prostej w układzie współrzędnych można dobrać takie trzy liczby A, B i C, by współrzędne każdego punktu tej prostej spełniały równanie $Ax + By + C = 0$, przy czym przynajmniej jedna z liczb, A lub B, była różna od 0.

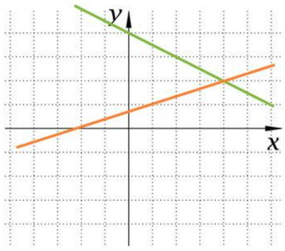
Równanie $Ax + By + C = 0$ nazywamy często **ogólnym równaniem prostej**.

Zwróć uwagę na to, że równanie ogólne tej samej prostej można zapisać na różne sposoby. Na przykład tę samą prostą opisują równania:

$$x + 2y - 3 = 0 \qquad -x - 2y + 3 = 0 \qquad 2x + 4y - 6 = 0 \qquad \tfrac{1}{2}x + y - \tfrac{3}{2} = 0$$

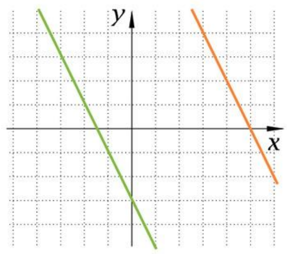
Przyjrzyj się poniższym układom równań i ich interpretacjom geometrycznym.

$$\begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$



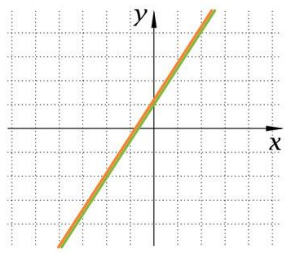
Te proste przecinają się w jednym punkcie — układ równań ma jedno rozwiązanie, jest to układ oznaczony.

$$\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$$



Proste są równoległe, nie mają punktów wspólnych — układ równań nie ma rozwiązań, jest to układ sprzeczny.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2 = 0 \\ -1{,}5x + y - 1 = 0 \end{cases}$$



Te proste pokrywają się, mają nieskończenie wiele punktów wspólnych — układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jest to układ nieoznaczony.

Uwaga. Rozwiązaniem nieoznaczonego układu równań jest każda para liczb spełniająca jedno z równań. Oczywiście taka para spełnia także drugie równanie.

Wiemy już, że każdą prostą w układzie współrzędnych można opisać równaniem w postaci ogólnej $Ax + By + C = 0$. Proste, które nie są prostopadłe do osi x, można także opisać za pomocą równania postaci $y = ax + b$. Takie równanie nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

1. Zapisz podane równania prostych w postaci kierunkowej.

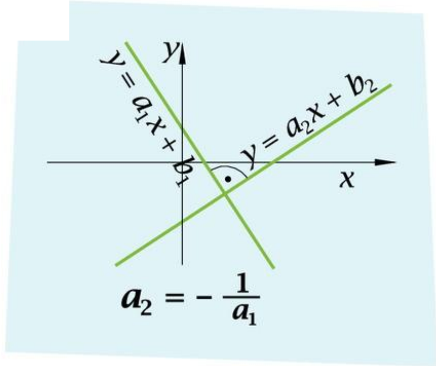
$$2x - y + 3 = 0 \qquad x + 3y - 1 = 0 \qquad 2x + y = 0$$

Współczynnik a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym prostej** $y = ax + b$. Nazwa ta wynika stąd, że współczynnik ten decyduje o kierunku prostej. Omówimy teraz, jaki jest związek między współczynnikiem kierunkowym prostej a kątem nachylenia tej prostej do osi x w układzie współrzędnych.

Prosta $y = a_1x + b_1$ jest równoległa do prostej $y = a_2x + b_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.

Prosta $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ jest równoległa do prostej $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1B_2 = A_2B_1$.

Prosta $y = a_1x + b_1$ jest prostopadła do prostej $y = a_2x + b_2$, wtedy i tylko wtedy, gdy $a_2 = -\frac{1}{a_1}$.



Prosta $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ jest prostopadła do prostej $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2 = -B_1B_2$.

1. a) Podane równania prostych zapisz w postaci ogólnej.

$$y = \frac{1}{3}x + 4 \qquad 3y - 4 = \frac{x}{2} \qquad y = -5 \qquad 2y + 3x = 2(y - x)$$

b) Podane równania prostych przedstaw w postaci kierunkowej.

$$-2x - 3y + 12 = 0 \qquad 2x - y = 5x \qquad 5y - 2 = 0 \qquad \frac{y - x}{2} = 4(x - 2y)$$