21.11.2020r. - matematyka – semestr IIIA – lekcja 1, 2

Temat: Dzielenie wielomianów.

Wiadomo, że jeśli dana liczba naturalna a jest iloczynem pewnych dwóch liczb, to w wyniku dzielenia liczby a przez jedną z tych liczb otrzymamy drugą z nich.

Na przykład równość:

$$4503 = 57 \cdot 79$$

możemy zapisać w postaci:

$$4503 : 57 = 79$$

Oznacza to, że liczba 4503 jest podzielna przez 57. W analogiczny sposób będziemy rozumieli dzielenie wielomianów.

Wiesz już, że wielomiany można rozkładać na czynniki. Na przykład wielomian $W(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 6$ można zapisać w postaci iloczynu:

$$2x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = (x-2)(2x^2+3)$$

Powyższą równość będziemy także zapisywali inaczej:

$$(2x^3 - 4x^2 + 3x - 6) : (x-2) = 2x^2 + 3$$

Mówimy wówczas, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$. Wynikiem dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - 2$ jest wielomian $2x^2 + 3$.

Uwaga. Wielomian $W(x)$ jest także podzielny przez dwumian $2x^2 + 3$.

Ćwiczenie A. Jaki wielomian należy wstawić w miejsce kropek?

1. $3x^5 + x^3 = x^2(\ldots\ldots\ldots)$

   $(3x^5 + x^3) : x^2 = \ldots\ldots\ldots$

2. $6x^7 - 8x^4 = 2x^3(\ldots\ldots\ldots)$

   $(6x^7 - 8x^4) : 2x^3 = \ldots\ldots\ldots$

Mówimy, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez niezerowy wielomian $P(x)$, jeśli istnieje taki wielomian $Q(x)$, że:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

Piszemy wówczas: $W(x) : P(x) = Q(x)$.

Pokażemy teraz, w jaki sposób znaleźć wynik dzielenia $W(x) : P(x)$, gdzie $W(x) = 6x^2 + x - 2$ i $P(x) = 2x + 1$. Oto kolejne etapy dzielenia:

$$\begin{array}{l} \underline{3x\qquad\qquad} \\ (6x^2 - x - 2) : (2x + 1) \end{array}$$

1. Dzielimy pierwszy wyraz wielomianu $W(x)$ (jednomian najwyższego stopnia) przez pierwszy wyraz wielomianu $P(x)$; $6x^2 : 2x = 3x$

$$\begin{array}{l} \underline{3x\qquad\qquad} \\ (6x^2 - x - 2) : (2x + 1) \\ \ 6x^2 + 3x \end{array}$$

2. Mnożymy częściowy wynik $3x$ przez wielomian $P(x)$; $3x \cdot (2x + 1) = 6x^2 + 3x$

$$\begin{array}{l} \underline{3x\qquad\qquad} \\ (6x^2 - x - 2) : (2x + 1) \\ \underline{-(6x^2 + 3x)\qquad} \\ \qquad -4x - 2 \end{array}$$

3. Otrzymany wynik mnożenia $6x^2 + 3x$ odejmujemy od wielomianu $W(x)$; $6x^2 - x - 2 - (6x^2 + 3x) = -4x - 2$

$$\begin{array}{l} \underline{3x - 2\qquad\qquad} \\ (6x^2 - x - 2) : (2x + 1) \\ \underline{-(6x^2 + 3x)\qquad} \\ \qquad -4x - 2 \end{array}$$

4. Dzielimy pierwszy wyraz wielomianu otrzymanego w wyniku odejmowania przez pierwszy wyraz wielomianu $P(x)$; $-4x : 2x = -2$

$$\begin{array}{l} \underline{3x - 2\qquad\qquad} \\ (6x^2 - x - 2) : (2x + 1) \\ \underline{-(6x^2 + 3x)\qquad} \\ \qquad -4x - 2 \\ \underline{\qquad -(-4x - 2)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

5. Mnożymy częściowy wynik -2 przez wielomian $P(x)$; $-2 \cdot (2x + 1) = -4x - 2$ i otrzymany wynik odejmujemy od wielomianu $-4x - 2$

Zauważ, że przy wykonywaniu dzielenia przedstawioną wyżej metodą obliczaliśmy różnice pewnych wielomianów (na przykład obliczaliśmy różnicę $(6x^2 - x - 2) - (6x^2 + 3x)$). Gdy wykonujemy takie działania, łatwo o pomyłkę, dlatego warto nieco zmienić sposób zapisu dzielenia:

$$
\begin{array}{l}
\underline{\quad 3x - 2 \quad} \\
(6x^2 - x - 2) : (2x + 1) \\
\underline{-6x^2 - 3x} \\
\quad\quad -4x - 2 \\
\quad\quad\ \ \underline{4x + 2} \\
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Wynik mnożenia $3x \cdot (2x + 1)$ zapisujemy ze zmienionymi znakami, a następnie dodajemy go do wielomianu $6x^2 - x - 2$.

Wynik mnożenia $-2 \cdot (2x + 1)$ zapisujemy ze zmienionymi znakami, a następnie dodajemy go do wielomianu $-4x - 2$.

Przykład. Wykonaj dzielenie wielomianów.

$$
\begin{array}{l}
\underline{\quad 2x - 5 \quad} \\
(2x^3 - 11x^2 + 17x - 5) : (x^2 - 3x + 1) \\
\underline{-2x^3 + 6x^2 - 2x} \\
\quad\quad -5x^2 + 15x - 5 \\
\quad\quad\ \ \underline{5x^2 - 15x + 5} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\underline{\quad x^2 - 3x \quad} \\
(x^5 - 3x^4 - 3x^2 + 9x) : (x^3 - 3) \\
\underline{-x^5 + 3x^2} \\
\quad\quad -3x^4 + 9x \\
\quad\quad\ \ \underline{3x^4 - 9x} \\
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Ćwiczenie B Wykonaj dzielenie $(6x^3 + 13x^2 - 26x + 7) : (2x^2 + 5x - 7)$, a następnie sprawdź otrzymany wynik, mnożąc odpowiednie wielomiany.

Podobnie jak przy dzieleniu liczb naturalnych, dzieląc wielomian przez inny wielomian, możemy otrzymać resztę różną od 0.

LICZBY	WIELOMIANY
$\begin{array}{l} \underline{\quad 26} \\ 2726 : 103 \\ \underline{-206} \\ \quad 666 \\ \underline{-618} \\ \quad\ 48 \longleftarrow \text{reszta} \end{array}$	$\begin{array}{l} \underline{\quad 2x + 7 \quad} \\ (2x^3 + 7x^2 + 2x + 6) : (x^2 + 3) \\ \underline{\ 2x^3 + 6x} \\ \quad\quad 7x^2 + 8x + 6 \\ \quad\quad \underline{7x^2 + 21} \\ \quad\quad\quad\ 8x + 27 \longleftarrow \text{reszta} \end{array}$
Wykonując dzielenie $2726 : 103$, otrzymujemy 26 i resztę 48, zatem:	Wykonując dzielenie $(2x^3 + 7x^2 + 2x + 6) : (x^2 + 3)$, otrzymujemy $2x + 7$ i resztę $8x + 27$, zatem:
$2726 = 26 \cdot 103 + 48$	$2x^3 + 7x^2 + 2x + 6 = (2x + 7)(x^2 + 3) + (8x + 27)$
Reszta jest mniejsza od liczby, przez którą dzielimy.	Stopień reszty jest mniejszy od stopnia wielomianu, przez który dzielimy.

21.11.2020r. - matematyka – semestr IIIA – lekcja 1, 2

Zadanie 2. Wykonaj dzielnie.

a) $(x^3 - 8x^2 + 17x - 10) : (x - 5)$

b) $(3x^3 + 8x^2 - 18x - 8) : (x + 4)$

c) $(9x^3 - 18x^2 - 4x + 1) : (3x + 1)$

d) $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1) : (1 - x)$