05.12.2020r. - matematyka – semestr III A – lekcja 1, 2

Temat: Równania wielomianowe (cd).

Aby rozwiązać równanie wielomianowe o współczynnikach całkowitych, możemy skorzystać z następującego twierdzenia:

Twierdzenie (o rozwiązaniach całkowitych)

Załóżmy, że w równaniu wielomianowym:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

wszystkie współczynniki a_n, a_{n-1}, ..., a_0 są liczbami całkowitymi i $a_0 \neq 0$. Jeśli rozwiązaniem tego równania jest liczba całkowita, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Dowód

Oznaczmy przez c liczbę całkowitą, która jest rozwiązaniem równania:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

gdzie współczynniki $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ są liczbami całkowitymi i $a_0 \neq 0$.

Wobec tego spełniona jest równość:

$$a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0 = 0$$

Zapiszmy tę równość w postaci:

$$c\left(a_n c^{n-1} + a_{n-1} c^{n-2} + \ldots + a_1\right) = -a_0$$

Liczba $a_n c^{n-1} + a_{n-1} c^{n-2} + \ldots + a_1$ jest całkowita (bo założyliśmy, że wszystkie współczynniki równania są liczbami całkowitymi). Wynika stąd, że liczba a_0 jest podzielna przez c.

Wykazaliśmy w ten sposób, że liczba c jest dzielnikiem liczby a_0. □

P Rozwiąż równanie $\frac{1}{4}x^3 - x^2 + 2 = 0$.

$\frac{1}{4}x^3 - x^2 + 2 = 0 \quad | \cdot 4$

$x^3 - 4x^2 + 8 = 0$

Przekształcamy równanie tak, aby otrzymać równoważne równanie o współczynnikach całkowitych.

Dzielniki wyrazu wolnego wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + 8$:

$1, \ -1, \ 2, \ -2, \ 4, \ -4, \ 8, \ -8$

$W(1) = 1 - 4 + 8 \neq 0$

$W(-1) = -1 - 4 + 8 \neq 0$

Liczby 1 i −1 nie spełniają równania $x^3 - 4x^2 + 8 = 0$.

$W(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 8 = 0$

Liczba 2 spełnia to równanie.

$$
\begin{array}{l}
\quad x^2 - 2x - 4 \\
\hline
(x^3 - 4x^2 + 8) : (x - 2) \\
-x^3 + 2x^2 \\
\hline
\quad -2x^2 + 8 \\
\quad\ \ 2x^2 - 4x \\
\hline
\qquad -4x + 8 \\
\qquad\ \ 4x - 8 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Dzielimy wielomian $x^3 - 4x^2 + 8$ przez dwumian $x - 2$.

$x^3 - 4x^2 + 8 = (x - 2)(x^2 - 2x - 4)$

$(x - 2) \cdot (x^2 - 2x - 4) = 0$

Zapisujemy równanie w innej postaci i je rozwiązujemy.

$x = 2$ lub $x^2 - 2x - 4 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot (-4) = 20$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$

$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{2} = 1 - \sqrt{5}$

$x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$

Odp. Równanie ma trzy rozwiązania: $x_1 = 1 - \sqrt{5}$, $x_2 = 1 + \sqrt{5}$ i $x_3 = 2$.

Zadanie 1. Rozwiąż równanie:

a) $5x^3 + 10x^2 + 6x + 1 = 0$

b) $3x^3 + 8x^2 - 4x - 3 = 0$

c) $10x^3 + 11x^2 - 16x + 4 = 0$

d) $4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = 0$

05.12.2020r. - matematyka – semestr III A – lekcja 1, 2

Temat: Rozwiązania wymierne równań wielomianowych.

A

1. Sprawdź, że równanie $2x^3 - x^2 + x - 6 = 0$ nie ma rozwiązań całkowitych.

2. Wypisz wszystkie dzielniki wyrazu wolnego oraz wszystkie dzielniki współczynnika przy najwyższej potędze wielomianu $2x^3 - x^2 + x - 6$. Zapisz wszystkie ułamki $\frac{p}{q}$, gdzie p jest dzielnikiem wyrazu wolnego, a q jest dzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze tego wielomianu.

3. Wśród ułamków, które zapisałeś w punkcie 2, jest jedno z rozwiązań równania $2x^3 - x^2 + x - 6 = 0$. Znajdź to rozwiązanie.

Metodę szukania rozwiązań wymiernych, którą posłużyłeś się w powyższym ćwiczeniu, można stosować dla dowolnego równania o współczynnikach całkowitych. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie:

Twierdzenie (o rozwiązaniach wymiernych)

Załóżmy, że w równaniu wielomianowym postaci:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi oraz $a_0 \neq 0$ i $a_n \neq 0$. Jeśli rozwiązaniem tego równania jest liczba wymierna, to można ją przedstawić w postaci ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie licznik p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, a mianownik q jest dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze.

1. Jedna z pięciu liczb zapisanych obok wielomianu $W(x)$ jest jego pierwiastkiem. Która?

a) $W(x) = 5x^3 + 23x^2 - 35x + 10$ $\quad \frac{1}{3},\ -\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ -\frac{4}{5},\ 3$

b) $W(x) = 3x^5 - x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 45x + 15$ $\quad -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{5}{2},\ -\frac{15}{8}$

c) $W(x) = -6x^3 - 11x^2 + 13x + 15$ $\quad \frac{3}{5},\ -\frac{5}{6},\ 2,\ -4,\ \frac{6}{5}$

d) $W(x) = -2x^5 - 9x^4 - 9x^3 - 11x^2 - 10x + 14$ $\quad -\frac{3}{7},\ \frac{1}{14},\ -3\frac{1}{2},\ \frac{2}{7},\ -12$

Uwaga. Aby sprawdzić, czy dana liczba jest pierwiastkiem wielomianu, należy podstawić tą liczbę w miejsce x i jeśli w wyniku otrzymamy 0, wtedy dana liczba jest pierwiastek wielomianu.