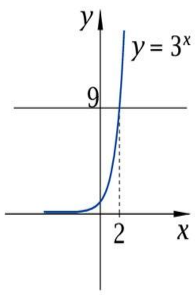
12.12.2020r. - matematyka – semestr III – lekcja 1, 2

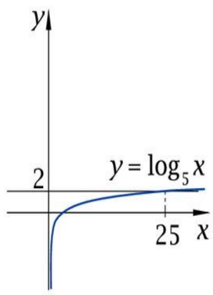
Temat: Równania wykładnicze i logarytmiczne.

O funkcji liczbowej mówimy, że jest **różnowartościowa**, gdy dla dowolnych dwóch różnych argumentów przyjmuje różne wartości. Innymi słowy: taka funkcja każdą wartość przyjmuje tylko dla jednego argumentu. Oznacza to, że spełniony jest warunek:

$$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$$

Zauważ, że każda funkcja rosnąca i każda funkcja malejąca jest różnowartościowa, więc ten warunek jest spełniony przez funkcje wykładniczą i logarytmiczną.





Równanie:

$$3^x = 9$$

można zapisać tak:

$$3^x = 3^2$$

Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa, więc:

$$x = 2$$

i liczba 2 jest jedynym rozwiązaniem rozważanego równania.

Równanie:

$$\log_5 x = 2$$

można zapisać tak:

$$\log_5 x = \log_5 25$$

Funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa, więc:

$$x = 25$$

i liczba 25 jest jedynym rozwiązaniem rozważanego równania.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż równanie.

a) $5^x = \frac{1}{25}$

$5^x = 5^{-2}$

$\underline{x = -2}$

b) $3^x = \sqrt[5]{3}$

$3^x = 3^{\frac{1}{5}}$

$\underline{x = \frac{1}{5}}$

Zapisujemy obie strony równania w postaci potęg o jednakowych podstawach.

Korzystamy z warunku: $a^p = a^r \iff p = r$ dla $a > 0$ i $a \neq 1$.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $2^x = \sqrt[3]{2}$ b) $10^x = 0{,}001$

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż równanie.

a) $2^x = \frac{\sqrt[3]{4}}{16}$

$2^x = \frac{\sqrt[3]{2^6}}{2^4}$

$2^x = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^4}$

$2^x = 2^{\frac{2}{3}-4}$

$2^x = 2^{-\frac{10}{3}}$

$\underline{x = -\frac{10}{3}}$

b) $9^x = \frac{27^x}{\sqrt{3}}$

$(3^2)^x = \frac{(3^3)^x}{3^{\frac{1}{2}}}$

$3^{2x} = 3^{3x-\frac{1}{2}}$

Korzystając z własności potęg, zapisujemy obie strony równania w postaci potęg o jednakowych podstawach.

$2x = 3x - \frac{1}{2}$

$\underline{x = \frac{1}{2}}$

Korzystamy z warunku: $a^p = a^r \iff p = r$ dla $a > 0$ i $a \neq 1$.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $4^x = \sqrt{2}$ b) $8^x = 2 \cdot 4^x$

Rozwiązując równanie wykładnicze, nie zawsze da się zastosować metodę pokazaną w powyższych przykładach. Czasem można znaleźć rozwiązanie, korzystając z definicji logarytmu.

PRZYKŁAD 3 Rozwiąż równanie.

a) $5 \cdot 2^x + 1 = 4$

$5 \cdot 2^x = 3$

$2^x = \frac{3}{5}$

$\underline{x = \log_2 \frac{3}{5}}$

Korzystamy z definicji logarytmu.

b) $3^x = 2 \cdot 5^x$

$\frac{3^x}{5^x} = 2$

$\left(\frac{3}{5}\right)^x = 2$

$\underline{x = \log_{\frac{3}{5}} 2}$

Korzystamy z definicji logarytmu.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $4 \cdot 3^x = 7$ b) $3 \cdot 5^x = 10^x$

Rozwiązując równania logarytmiczne, można korzystać z definicji logarytmu lub różnowartościowości funkcji logarytmicznej. Przy rozwiązywaniu takich równań trzeba pamiętać o odpowiednich założeniach.

PRZYKŁAD 4 Rozwiąż równanie.

a) $3\log_5 x + 4 = 6$ zał. $x > 0$

$3\log_5 x = 2$

$\log_5 x = \frac{2}{3}$ — Korzystamy z definicji logarytmu.

$x = 5^{\frac{2}{3}}$

$\underline{x = \sqrt[3]{25}}$ — Liczba $\sqrt[3]{25}$ jest dodatnia, więc spełnia założenie.

b) $\log_2 x = \log_2(2x + 5)$ zał. $x > 0$ i $2x + 5 > 0$

$x = 2x + 5$ — Korzystamy z warunku: $\log_a p = \log_a r \iff p = r$ dla $a > 0$ i $a \neq 1$.

$x = -5$

Liczba -5 nie spełnia założeń. Równanie nie ma rozwiązania.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $5\log_2 x - 3 = 1$

b) $\log 2x = \log(1 - x)$