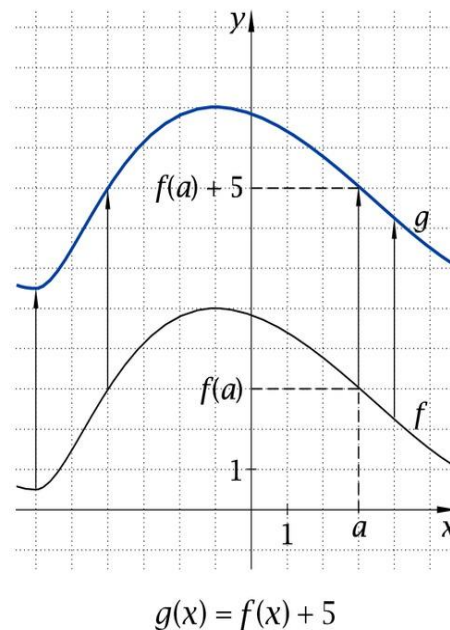


Temat: Przekształcanie wykresów funkcji.

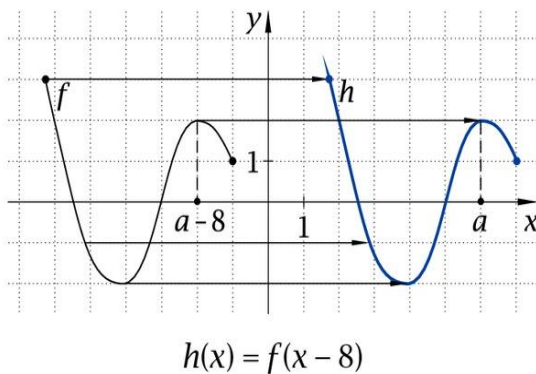
Popatrz na rysunek obok. Wartość funkcji  $g$  dla argumentu  $x$  jest o 5 większa od wartości funkcji  $f$  dla tego argumentu. Można więc powiedzieć, że dla każdego argumentu  $x$  funkcja  $g$  przyjmuje wartość równą  $f(x) + 5$ .

Wykres funkcji  $g$  powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji  $f$  o 5 jednostek w górę.

Uwaga. Mówiąc: „przesunięcie w górę”, będziemy mieli na myśli przesunięcie w kierunku zgodnym ze zwrotem osi  $y$ , a mówiąc: „przesunięcie w dół” — przesunięcie w kierunku przeciwnym.



Popatrz na poniższy rysunek. Wartość funkcji  $h$  dla argumentu  $x$  jest taka sama, jak wartość funkcji  $f$  dla argumentu o 8 mniejszego od  $x$ .



Możemy więc powiedzieć, że dla każdego argumentu  $x$  funkcja  $h$  przyjmuje wartość równą  $f(x - 8)$ .

Wykres funkcji  $h$  powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji  $f$  o 8 jednostek w prawo.

Uwaga. Mówiąc: „przesunięcie w prawo”, będziemy mieli na myśli przesunięcie w kierunku zgodnym ze zwrotem osi  $x$ , a mówiąc: „przesunięcie w lewo” — przesunięcie w kierunku przeciwnym.

**PRZYKŁAD 1** Dana jest funkcja  $f(x) = \frac{2-x}{x^2} + 1$ . Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji  $f$ :

a) o 5 jednostek w górę

$$g(x) = f(x) + 5$$

$$g(x) = \frac{2-x}{x^2} + 1 + 5$$

$$\underline{g(x) = \frac{2-x}{x^2} + 6}$$

b) o 5 jednostek w prawo

$$h(x) = f(x - 5)$$

$$h(x) = \frac{2-(x-5)}{(x-5)^2} + 1$$

$$\underline{h(x) = \frac{7-x}{(x-5)^2} + 1}$$

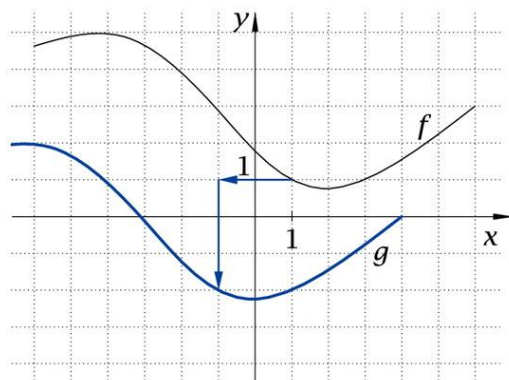
**ZADANIE** Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = 2x^2 - 3x$ . Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji  $f$ :

a) o 7 jednostek w górę,

b) o 6 jednostek w lewo.

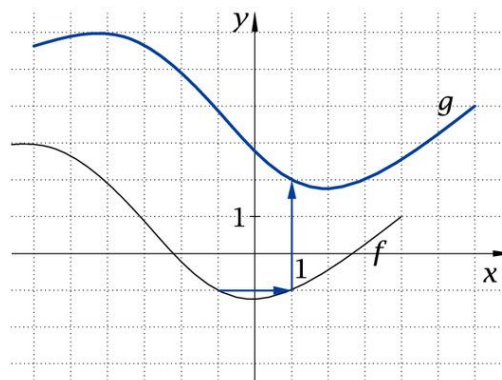
Na każdym z poniższych rysunków przedstawiono wykres funkcji  $f$  i wykres, który powstał w wyniku jego przesunięcia, w poziomie i w pionie. Pod rysunkami zapisano wzory otrzymanych funkcji.

Wykres funkcji  $f$  przesunięto  
o 2 jednostki w lewo  
i o 3 jednostki w dół.



$$g(x) = f(x + 2) - 3$$

Wykres funkcji  $f$  przesunięto  
o 2 jednostki w prawo  
i o 3 jednostki w górę.



$$h(x) = f(x - 2) + 3$$

W tabeli zebrano przykłady ilustrujące, jak zmienia się wzór funkcji przy różnych przesunięciach.

Sposób przesunięcia wykresu funkcji $y = f(x)$		Otrzymana funkcja
w poziomie	w pionie	
o 5 jednostek w prawo $\rightarrow$	o 3 jednostki w górę $\uparrow$	$y = f(x - 5) + 3$
o 4 jednostki w prawo $\rightarrow$	o 2 jednostki w dół $\downarrow$	$y = f(x - 4) - 2$
o 7 jednostek w lewo $\leftarrow$	o 1 jednostkę w górę $\uparrow$	$y = f(x + 7) + 1$
o 6 jednostek w lewo $\leftarrow$	o 8 jednostek w dół $\downarrow$	$y = f(x + 6) - 8$

**PRZYKŁAD 2** Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji  $f(x) = 4x^3 + 5x + 1$  o 2 jednostki w lewo i o 7 jednostek w górę.

$$y = f(x + 2) + 7$$

$$y = 4(x + 2)^3 + 5(x + 2) + 1 + 7$$

$$y = 4(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + 5x + 10 + 8$$

$$\underline{y = 4x^3 + 24x^2 + 53x + 50}$$

**ZADANIE** Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{2}{x} + 5x$ . Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymamy w wyniku przesunięcia wykresu funkcji  $f$  o 6 jednostek w lewo i o 4 jednostki w dół.