09.01.2021r. - matematyka – semestr III – lekcja 1, 2, 3

Temat: Zastosowanie funkcji wykładniczych i logarytmicznych.

PRZYKŁAD 1 W 1971 r. w Indiach żyło 548 mln ludzi, a w 1991 r. — 846 mln. Liczba ludności Indii w latach 1971–1995 zmieniała się zgodnie z modelem wykładniczym.

a) Ustal wzór dla tego modelu.

$L(t) = b \cdot a^t$ $L(t)$ — liczba ludności Indii (w mln) t — czas (w latach) od 1971 roku

Zapisujemy ogólny wzór modelu wykładniczego.

$548 = b \cdot a^0$

$b = 548$

Początkiem obserwacji populacji był rok 1971. Wówczas $t = 0$ odpowiada rokowi 1971, czyli $L(0) = 548$.

$846 = b \cdot a^{20}$

$846 = 548 \cdot a^{20}$

$a = \sqrt[20]{\frac{846}{548}} \approx 1{,}022$

Rokowi 1991 odpowiada $t = 20$, więc $L(20) = 846$.
$b = 548$

Otrzymaliśmy wzór: $\underline{L(t) = 548 \cdot 1{,}022^t}$

b) Oszacuj liczbę ludności Indii w 1980 roku i w 1995 roku.

$L_{1980} = 548 \cdot 1{,}022^9 \approx 667$

$L_{1995} = 548 \cdot 1{,}022^{24} \approx 924$

Korzystamy ze wzoru $L(t) = 548 \cdot 1{,}022^t$ dla $t = 9$ i dla $t = 24$.

Odp. W 1980 r. liczba ludności Indii wynosiła ok. 667 mln, a w 1995 r. — ok. 924 mln.

c) W 2000 roku liczba ludności Indii przekroczyła 1 miliard. Oblicz, w którym roku miało to nastąpić zgodnie z podanym wzorem.

$1000 = 548 \cdot 1{,}022^t$

Korzystamy ze wzoru $L(t) = 548 \cdot 1{,}022^t$, dla $L(t) = 1000$.

$1{,}022^t = \frac{1000}{548}$

$\log 1{,}022^t = \log \frac{1000}{548}$

Logarytmujemy obie strony równania.

$t \cdot \log 1{,}022 = \log \frac{1000}{548}$

$t = \frac{\log \frac{1000}{548}}{\log 1{,}022}$

$t \approx 28$

28 lat po 1971 roku.

Odp. Zgodnie ze wzorem liczba ludności Indii miała przekroczyć 1 mld w 1999 r.

ZADANIE Liczba ludności Nigerii w latach 2006–2017 zmieniała się zgodnie z modelem wykładniczym. Ustal wzór dla tego modelu, wiedząc, że w 2006 r. w Nigerii żyło 140 mln ludzi, a w 2011 r. — 162 mln. Korzystając z tego wzoru, oszacuj liczbę ludności Nigerii w 2015 r. i ustal, w którym roku liczba ludności przekroczy 250 mln.

PRZYKŁAD 2 Poziom głośności gwizdka czajnika wynosi 90 dB, a gwizdka pociągu — 110 dB.

a) Ile razy większe jest natężenie dźwięku gwizdka pociągu niż gwizdka czajnika?

I_c — natężenie dźwięku gwizdka czajnika

I_p — natężenie dźwięku gwizdka pociągu

Korzystamy ze wzoru $L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$, gdzie $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

$$90 = 10 \log \frac{I_c}{10^{-12}} \qquad 110 = 10 \log \frac{I_p}{10^{-12}}$$

$$9 = \log \frac{I_c}{10^{-12}} \qquad 11 = \log \frac{I_p}{10^{-12}}$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$\frac{I_c}{10^{-12}} = 10^9 \qquad \frac{I_p}{10^{-12}} = 10^{11}$$

$$I_c = 10^9 \cdot 10^{-12} \qquad I_p = 10^{11} \cdot 10^{-12}$$

$$I_c = 10^{-3} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right] \qquad I_p = 10^{-1} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$$

$$\frac{I_p}{I_c} = \frac{10^{-1}}{10^{-3}} = 100$$

Odp. Natężenie dźwięku gwizdka pociągu jest 100 razy większe od natężenia dźwięku gwizdka czajnika.

b) Oblicz poziom głośności dźwięku wydawanego przez gwizdki dwóch mijających się pociągów.

I — natężenie dźwięku gwizdków dwóch pociągów

$$I = I_p + I_p = 2 \cdot 10^{-1}$$

Natężenia dwóch równoczesnych dźwięków się dodaje; wcześniej obliczyliśmy, że $I_p = 10^{-1}$ W/m^2.

Korzystamy ze wzoru $L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$.

$$L = 10 \log \frac{2 \cdot 10^{-1}}{10^{-12}} = 10 \log(2 \cdot 10^{11}) =$$

$$= 10(\log 2 + \log 10^{11}) =$$

$\log(2 \cdot 10^{11}) = \log 2 + \log 10^{11}$

$$= 10(\log 2 + 11) \approx 113$$

Odp. Poziom głośności dźwięku gwizdków dwóch pociągów to około 113 dB.

c) Ile gwizdków czajników stwarza hałas bolesny dla ucha, czyli o poziomie głośności 130 dB?

I_n — natężenie dźwięku n gwizdków czajników

$$I_n = n \cdot I_c$$

$$I_n = n \cdot 10^{-3}$$

Obliczyliśmy wcześniej, że $I_c = 10^{-3}$ W/m^2.

$$130 = 10 \log \frac{n \cdot 10^{-3}}{10^{-12}}$$

Korzystamy ze wzoru $L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$.

$$13 = \log(n \cdot 10^9)$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$n \cdot 10^9 = 10^{13}$$

$$n = \frac{10^{13}}{10^9}$$

$$n = 10^4$$

Odp. Potrzeba aż 10 000 gwiżdżących czajników, aby poziom głośności wyniósł 130 dB.

ZADANIE Poziom głośności dźwięku wydawanego przez pewną lodówkę jest równy 40 dB, a przez pewien odkurzacz — 80 dB.

a) Ile razy natężenie dźwięku wydawanego przez odkurzacz jest większe od natężenia dźwięku wydawanego przez lodówkę?

b) Oblicz poziom głośności dźwięku wydawanego przez lodówkę i odkurzacz pracujące jednocześnie.

c) Ile pracujących odkurzaczy stwarza hałas o poziomie głośności 100 dB?