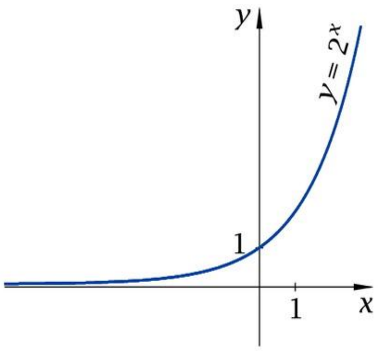
Temat: Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna.

Wiesz już, że dla każdej liczby rzeczywistej x określona jest liczba 2^x. Można więc rozpatrywać funkcję $y = 2^x$, której dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}$.

ĆWICZENIE A Oblicz wartości funkcji $y = 2^x$ dla argumentów: $-3, -2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ i zaznacz w układzie współrzędnych odpowiadające tym argumentom punkty wykresu funkcji. Naszkicuj wykres tej funkcji.

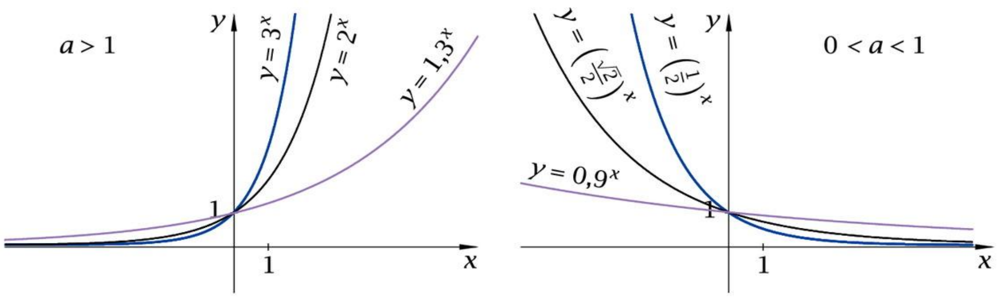
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = 2^x$. Zauważ, że:



- Wartości funkcji są dodatnie, gdyż $2^x > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x.
- Wykres nie przecina osi x, ale dla coraz mniejszych argumentów odpowiadające im punkty wykresu leżą coraz bliżej tej osi. Mówimy, że oś x jest asymptotą poziomą wykresu funkcji $y = 2^x$.
- Wykres funkcji przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0, 1)$, bo $2^0 = 1$.

Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y = a^x$, gdzie $a > 0$, nazywamy **funkcją wykładniczą**. Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Zwróć uwagę, że dla $a = 1$ funkcja wykładnicza ma postać $y = 1$, a więc jest funkcją stałą. Poniższe rysunki przedstawiają wykresy kilku funkcji wykładniczych $y = a^x$, gdzie $a \neq 1$, i podano ich własności.

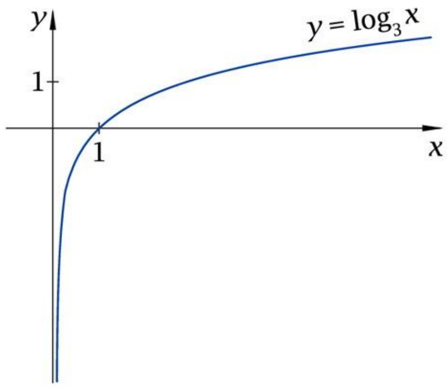


- Zbiorem wartości funkcji jest przedział $(0; +\infty)$.
- Oś x jest asymptotą poziomą wykresu funkcji.
- Wykres funkcji przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0, 1)$.
- Dla $a > 1$ funkcja $y = a^x$ jest rosnąca, a dla $0 < a < 1$ jest malejąca.

Ponieważ każdej liczbie dodatniej x możemy jednoznacznie przyporządkować liczbę $\log_2 x$ (czyli taki wykładnik potęgi, do którego należy podnieść 2, aby otrzymać x), więc możemy rozpatrywać funkcję $\log_2 x$, której dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}_+$.

ĆWICZENIE C Oblicz wartości funkcji $y = \log_3 x$ dla argumentów: 3, 9, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, 1 i zaznacz w układzie współrzędnych odpowiadające tym argumentom punkty wykresu funkcji. Naszkicuj jej wykres.

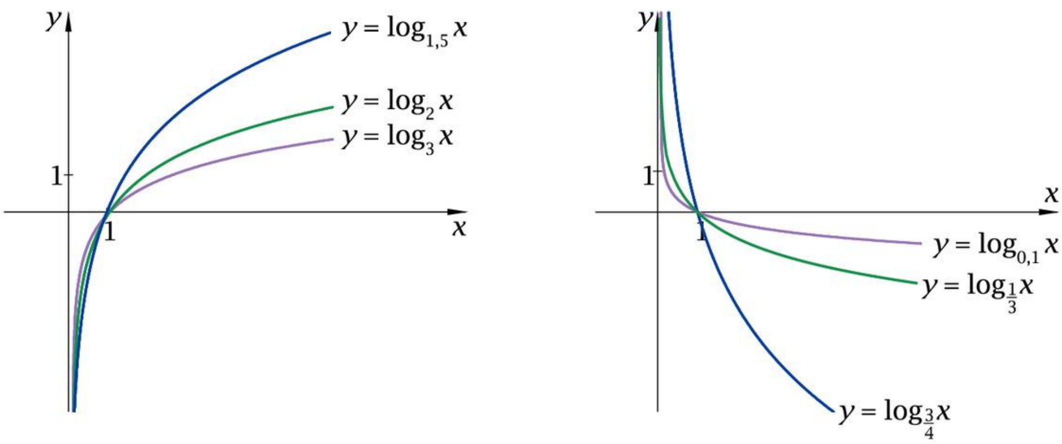
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = \log_3 x$. Zauważ, że:



- Dziedziną funkcji jest zbiór $(0;+\infty)$.
- Wykres funkcji nie przecina osi y, ale im argumenty są bliższe zeru, tym bardziej odpowiadające im punkty wykresu zbliżają się do osi y. Mówimy, że oś y jest asymptotą pionową wykresu funkcji.
- Wykres funkcji przecina oś x w punkcie $(1,0)$.

Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, nazywamy **funkcją logarytmiczną**. Dziedziną funkcji logarytmicznej jest przedział $(0;+\infty)$.

Oto przykłady wykresów kilku funkcji logarytmicznych oraz ich własności.



- Zbiorem wartości funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Oś y jest asymptotą (pionową) wykresu funkcji.
- Wykres funkcji przecina oś x tylko w punkcie $(1,0)$, tzn. jedynym miejscem zerowym funkcji jest $x = 1$.
- Dla $a > 1$ funkcja $y = \log_a x$ jest rosnąca, a dla $0 < a < 1$ jest malejąca.

1. Na każdym z poniższych rysunków przedstawiono wykresy dwóch spośród następujących funkcji:

$$f(x) = 0{,}6^x \qquad g(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x \qquad h(x) = 2{,}7^x \qquad k(x) = 10^x$$

Dopasuj wzory do wykresów.