05.12.2020r. - matematyka – semestr III – lekcja1, 2

Temat: Wzory i wykresy funkcji.

Przypomnijmy, że **funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y** nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru X odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y.

Zapis $f\colon X \to Y$ oznacza funkcję f o dziedzinie X, której wartości należą do zbioru Y. Zbiór wartości funkcji jest podzbiorem zbioru Y, ale nie musi być równy Y.

Rozważmy funkcję $f:\left(-1\,;+\infty\right) \to \mathbb{R}$ opisaną w następujący sposób:

Każdej liczbie rzeczywistej x większej od -1 przyporządkowujemy iloraz liczby x przez liczbę o 1 większą od x.

Sposób, w jaki argumentom są przyporządkowane wartości tej funkcji, można przedstawić za pomocą wzoru:

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Wzór tej funkcji można też zapisać na inne sposoby. Oto przykłady:

$$y = \frac{x}{x+1} \qquad\qquad x \to \frac{x}{x+1}$$

Uwaga. Gdy argumenty się zmieniają, to wartości też mogą się zmieniać, ale zawsze wartość y zależy od wybranego argumentu x, dlatego x nazywamy zmienną niezależną, a y — zmienną zależną.

Korzystając ze wzoru, możemy obliczyć wartości rozważanej funkcji dla liczb należących do dziedziny, czyli do zbioru $\left(-1\,;+\infty\right)$. Na przykład dla argumentów 2, $-\frac{1}{2}$, 0, 3 otrzymujemy:

$$f(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \qquad\qquad f(0) = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1} = -1 \qquad\qquad f(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

W tabelce obok zestawiono wybrane argumenty i odpowiadające im wartości.

x	2	$-\frac{1}{2}$	0	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	-1	0	$\frac{3}{4}$

Z powyższych obliczeń wynika, że do wykresu funkcji f należą punkty:

$$\left(2, \frac{2}{3}\right),\ \left(-\frac{1}{2}, -1\right),\ (0, 0),\ \left(3, \frac{3}{4}\right)$$

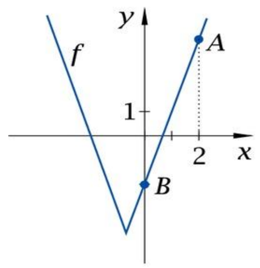
PRZYKŁAD 1 Wzór $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ opisuje funkcję określoną na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sprawdź, czy punkty A i B należą do wykresu tej funkcji.

$A = \left(2, \frac{1}{4}\right) \qquad f(2) = \frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{4} \qquad B = (-2, 1) \qquad f(-2) = \frac{-2-1}{(-2)^2} = -\frac{3}{4} \neq 1$

Odp. Punkt $A = \left(2, \frac{1}{4}\right)$ należy do wykresu funkcji f, a punkt $B = (-2, 1)$ nie należy do wykresu tej funkcji.

ZADANIE Czy punkty $A = \left(9, \frac{3}{10}\right)$, $B = \left(\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}\right)$ należą do wykresu funkcji $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$?

PRZYKŁAD 2 Rysunek przedstawia wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = |3x+2| - 4$. Znajdź współrzędne punktów A i B.



Punkt A: $f(2) = |3 \cdot 2 + 2| - 4 = 4$

$\underline{A = (2, 4)}$

$A = (2, f(2))$

Punkt B: $f(0) = |3 \cdot 0 + 2| - 4 = -2$

$\underline{B = (0, -2)}$

ZADANIE Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = |2x - 3| - 5$. Punkt P o pierwszej współrzędnej -7 należy do wykresu tej funkcji. Jaka jest druga współrzędna tego punktu? W jakim punkcie wykres tej funkcji przecina oś y?

Argument, dla którego wartość funkcji liczbowej jest równa 0, nazywamy **miejscem zerowym funkcji**. Innymi słowy:

$$x_0 \text{ jest miejscem zerowym funkcji} \iff f(x_0) = 0$$

PRZYKŁAD 3 Funkcja $f(x) = (2x+1)(x^2 - 2x - 1)$ jest określona na zbiorze $\mathbb{R}$. Znajdź wszystkie miejsca zerowe tej funkcji.

$f(x) = (2x+1)(x^2 - 2x - 1)$

$(2x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$

$2x + 1 = 0$ lub $x^2 - 2x - 1 = 0$

$x = -\frac{1}{2} \qquad \Delta = 4 + 4 = 8$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$

$x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$

Aby znaleźć argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość 0, rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$.

Odp. Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby $-\frac{1}{2}$, $1 - \sqrt{2}$ oraz $1 + \sqrt{2}$.

ZADANIE Znajdź miejsca zerowe funkcji $y = x^3 - 2x^2$ określonej na zbiorze $\mathbb{R}$.

Gdy funkcja jest określona tylko za pomocą wzoru, a jej dziedzina nie jest podana, przyjmujemy, że do dziedziny należą wszystkie liczby rzeczywiste, dla których da się obliczyć wartość funkcji.

PRZYKŁAD 4 Określ dziedzinę funkcji $y = \frac{6}{x-2} + \sqrt{3x}$.

$x - 2 \neq 0$ i $3x \geqslant 0$

Dzielenie przez zero nie jest określone; liczba podpierwiastkowa musi być nieujemna.

Zatem:

$x \neq 2$ i $x \geqslant 0$

Odp. Dziedziną funkcji jest zbiór $\langle 0; +\infty) \setminus \{2\}$.

ZADANIE Określ dziedzinę funkcji $y = \frac{\sqrt{2-x}}{x-1}$.