Temat: Pierwiastki.

stopień pierwiastka

$$\sqrt[n]{a}$$

liczba podpierwiastkowa

Jeśli k jest parzystą liczbą naturalną większą od 1, to dla $a \geqslant 0$ przyjmujemy, że:

$$\sqrt[k]{a} = b \iff (b^k = a \text{ i } b \geqslant 0)$$

Jeśli m jest nieparzystą liczbą naturalną większą od 1, to dla dowolnej liczby a przyjmujemy, że:

$$\sqrt[m]{a} = b \iff b^m = a$$

Przekształcając wyrażenia z pierwiastkami, możemy korzystać z poniższych równości.

Prawa działań na pierwiastkach

Dla parzystej liczby k:	Dla nieparzystej liczby m:
$\sqrt[k]{a^k} = \lvert a \rvert$	$\sqrt[m]{a^m} = a$
$\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}$ dla $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$	$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$
$\sqrt[k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}$ dla $a \geqslant 0$ i $b > 0$	$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ dla $b \neq 0$
$\sqrt[k]{a^t} = (\sqrt[k]{a})^t$ dla $a \geqslant 0$	$\sqrt[m]{a^t} = (\sqrt[m]{a})^t$
	$\sqrt[m]{-a} = -\sqrt[m]{a}$

Prawa działań na pierwiastkach pozwalają upraszczać niektóre wyrażenia.

PRZYKŁAD 1 Oblicz.

a) $(2\sqrt[3]{6})^3 = 2^3 \cdot (\sqrt[3]{6})^3 = 8 \cdot 6 = 48$

b) $\sqrt{2^{10}} = \sqrt{(2^5)^2} = 2^5 = 32$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{-8} = -2$

d) $\sqrt{1\frac{3}{4}} : \sqrt{7} = \sqrt{\frac{7}{4} : 7} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

ZADANIE Oblicz.

a) $\left(2\sqrt[4]{3}\right)^4$

b) $(\sqrt[5]{-6})^{10}$

c) $\frac{\sqrt[3]{-80}}{\sqrt[3]{10}}$

d) $\sqrt{7^3} \cdot \sqrt{7}$

Czasami pierwiastki wygodnie jest zapisać w innej postaci – wyłączyć czynnik przed symbol pierwiastka albo wykonać operację odwrotną, tzn. włączyć czynnik pod pierwiastek.

PRZYKŁAD 2 Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{180} = \sqrt{9 \cdot 20} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{-54} = -\sqrt[3]{27 \cdot 2} = -\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = -3\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[4]{5^{13}} = \sqrt[4]{5^{12} \cdot 5} = \sqrt[4]{(5^3)^4} \cdot \sqrt[4]{5} = 125\sqrt[4]{5}$

d) $\left(\sqrt[5]{2}\right)^8 = \left(\sqrt[5]{2}\right)^5 \cdot \left(\sqrt[5]{2}\right)^3 = 2\sqrt[5]{8}$

ZADANIE Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{450}$ b) $-\sqrt[3]{160}$ c) $\sqrt[5]{7^{16}}$ d) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^7$

PRZYKŁAD 3 Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

a) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$

b) $2\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{8 \cdot 100} = \sqrt[3]{800}$

ZADANIE Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

a) $5\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $3\sqrt[3]{2}$ d) $5\sqrt[3]{4}$

Gdy pierwiastek z liczby wymiernej występuje w mianowniku wyrażenia, to możemy je tak przekształcić, aby w mianowniku była liczba wymierna. Mówimy wtedy, że usuwamy niewymierność z mianownika.

PRZYKŁAD 4 Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(4+\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}+2}{2} = 2\sqrt{2}+1$

b) $\frac{5}{2\sqrt[3]{3}} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}} = \frac{5\sqrt[3]{9}}{6}$

c) $\frac{2}{2\sqrt{3}-1} = \frac{2\cdot(2\sqrt{3}+1)}{(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)} = \frac{4\sqrt{3}+2}{12-1} = \frac{4\sqrt{3}+2}{11}$

Korzystamy ze wzoru:
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

ZADANIE Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{6}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1-\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}$ c) $\frac{8}{\sqrt[3]{6}}$ d) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ e) $\frac{7}{\sqrt{3}-2}$