05.12.2020r. - matematyka – semestr I – lekcja1, 2

Temat: Rozwiązywanie równań.

Równanie, które można przekształcić do postaci:

$$ax + b = 0,$$

gdzie a i b są danymi liczbami, nazywamy **równaniem pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.**

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż równanie.

$(x-2)^3 - x^2(x-6) = 7x + 2$

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + 6x^2 = 7x + 2$

$12x - 8 = 7x + 2$

$5x = 10$

$\underline{x = 2}$

Korzystamy ze wzoru:
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

ZADANIE Rozwiąż równanie: a) $(6+x)^2 = (x+4)^2$ b) $(2x-5)(2x+5) = (1-2x)^2$

Równania, które nie mają rozwiązań, nazywamy **sprzecznymi**. Gdy każda liczba spełnia dane równanie, nazywamy je **tożsamościowym**.

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż równanie.

a) $4x(x+1) = (2x+1)^2$

$4x^2 + 4x = 4x^2 + 4x + 1$

$0 \cdot x = 1$

Równanie sprzeczne.

Nie ma liczby, która po pomnożeniu przez 0 byłaby równa 1. Równanie nie ma rozwiązań.

b) $x(x+2) - (x+1)^2 + 1 = 0$

$x^2 + 2x - (x^2 + 2x + 1) + 1 = 0$

$x^2 + 2x - x^2 - 2x - 1 + 1 = 0$

$0 \cdot x = 0$

Równanie tożsamościowe.

Rozwiązaniem równania jest dowolna liczba.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $(2x-1)(2x+1) + 2 = (2x+1)^2 - 4x$

b) $(x+4)(x-6) = (x-1)^2$

Niektóre równania, które mają postać proporcji, da się rozwiązać, stosując takie same metody, jak przy równaniach pierwszego stopnia. Trzeba jednak pamiętać, że wartości wyrażeń występujących w mianowniku nie mogą być równe 0.

Jeśli $b \neq 0$ i $d \neq 0$, to proporcję: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

można zastąpić równością:

$$ad = bc$$

PRZYKŁAD 3 Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4-x}{5+x} = \frac{5-x}{x+1}$ Założenia: $5 + x \neq 0$ i $x + 1 \neq 0$

$x \neq -5$ $\quad$ $x \neq -1$

$(4 - x)(x + 1) = (5 - x)(5 + x)$

Jeśli $b \neq 0$ i $d \neq 0$, to proporcję $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ można zastąpić równością $ad = bc$.

$4x + 4 - x^2 - x = 25 - x^2$

$3x + 4 = 25$

$3x = 21$

$\underline{x = 7}$

Rozwiązanie $x = 7$ spełnia założenia.

b) $\frac{6-3x}{x-2} = \frac{1-3x}{x}$ Założenia: $x - 2 \neq 0$ i $x \neq 0$

$x \neq 2$

$(6 - 3x) \cdot x = (x - 2)(1 - 3x)$

Jeśli $b \neq 0$ i $d \neq 0$, to proporcję $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ można zastąpić równością $ad = bc$.

$6x - 3x^2 = x - 3x^2 - 2 + 6x$

$0 = x - 2$

$x = 2$

Liczba 2 nie spełnia założenia, więc równanie jest sprzeczne.

Równanie nie ma rozwiązań.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

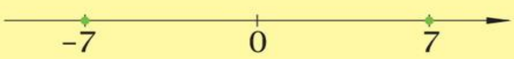
a) $\frac{3x+2}{2+x} = \frac{9x+1}{3x+2}$ $\quad$ b) $\frac{9+3x}{x+3} = \frac{3x}{x+1}$ $\quad$ c) $\frac{2x+6}{4x+1} = \frac{3+x}{2x+6}$

Metody rozwiązywania równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą można też wykorzystać do wyznaczania liczb spełniających niektóre równania, w których występuje wartość bezwzględna.

Przykłady równań z wartością bezwzględną:

$|x| = 6$ $\quad$ $|2x - 1| = 4$

$6 = \frac{|5 - x|}{4}$



$|a| = 7 \iff a = 7$ lub $a = -7$

PRZYKŁAD 4 Rozwiąż równanie.

a) $|4 - x| = 7$

$4 - x = 7$ lub $4 - x = -7$

$\underline{x = -3 \text{ lub } x = 11}$

Równanie ma dwa rozwiązania.

b) $|2x + 5| = 13$

$2x + 5 = 13$ lub $2x + 5 = -13$

$2x = 8$ lub $2x = -18$

$\underline{x = 4 \text{ lub } x = -9}$

Równanie ma dwa rozwiązania.

c) $3 \cdot |5x - 4| = 0 \quad | : 3$

Przekształcamy równanie do postaci $|a| = b$.

$|5x - 4| = 0$

Liczba 0 to jedyna liczba, której wartość bezwzględna jest równa 0.

$5x - 4 = 0$

$\underline{x = \frac{4}{5}}$

d) $5|2x + 3| + 4 = 0 \quad | - 4$

Przekształcamy równanie do postaci $|a| = b$.

$5|2x + 3| = -4 \quad | : 5$

$|2x + 3| = -\frac{4}{5}$

Równanie sprzeczne.

Nie ma liczb, których wartość bezwzględna jest ujemna.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $|x + 6| - 8 = 0$ b) $\frac{|4 - 3x|}{-5} = 2$ c) $4 \cdot |2x - 6| + 3 = 3$

05.12.2020r. - matematyka – semestr I – lekcja1, 2

Temat: Wielkości wprost proporcjonalne i odwrotnie proporcjonalne.

W tabeli przedstawiono, ile złotych trzeba zapłacić za kawałki pewnej wstążki.

x	0,2	0,5	1	1,2	1,5	5	7,5
y	0,10	0,25	0,50	0,60	0,75	2,50	3,75

x — długość wstążki (w metrach)

y — koszt zakupu wstążki (w złotych)

Zauważmy, że dla liczb podanych w tabeli stosunek $\frac{y}{x}$ jest zawsze równy 0,50. Zatem związek między kosztem zakupu a długością wstążki można zapisać w postaci równości:

$$\frac{y}{x} = 0{,}50$$

Z tej równości wynika, że gdy zwiększa się wielkość x, to tyle samo razy zwiększa się wielkość y.

Zależne od siebie wielkości x i y są **wprost proporcjonalne**, gdy:

$$\boldsymbol{\frac{y}{x} = a},$$

gdzie a jest stałą i $a > 0$.

PRZYKŁAD 1 Gdy na wadze położono gwoździe z dużej paczki, okazało się, że ważyły 1,05 kg. Po zdjęciu z szalki 24 gwoździ waga wskazała, że pozostałe gwoździe ważą 0,9 kg. Ile sztuk gwoździ było w dużej paczce?

masa gwoździ [kg]	1,05	0,9
liczba gwoździ [szt.]	x	$x - 24$

$$\frac{1{,}05}{x} = \frac{0{,}9}{x-24}$$

Liczba gwoździ i ich masa to wielkości wprost proporcjonalne, więc zachodzi równość ilorazów.

$1{,}05(x - 24) = 0{,}9x$

$1{,}05x - 25{,}2 = 0{,}9x$

$0{,}15 = 25{,}2$

$x = 168$

Rozwiązujemy otrzymane równanie.

Odp. W dużej paczce było 168 gwoździ.

ZADANIE W słoiku jest 0,9 l miodu, który waży 1,25 kg. Oblicz masę 4,5 l miodu.

Zależne od siebie wielkości x i y są **odwrotnie proporcjonalne**, gdy:

$$y \cdot x = a,$$

gdzie a jest stałą i $a > 0$.

PRZYKŁAD 2 Kierownik schroniska obliczył, że jeśli schronisko odwiedzać będzie 250 turystów dziennie, to zapasów żywności wystarczy na 30 dni. Na ile dni wystarczyłoby tych zapasów, gdyby schronisko odwiedzało dziennie 300 turystów?

liczba osób	250	300
liczba dni	30	x

Liczba turystów jest odwrotnie proporcjonalna do liczby dni, na które wystarczy zapasów żywności, więc zapisujemy równość iloczynów.

$250 \cdot 30 = 300 \cdot x$

$x = 25$

Rozwiązujemy równanie.

Odp. Zapasów wystarczyłoby na 25 dni.

ZADANIE Hodowca obliczył, że zapas wody w zbiorniku na pastwisku starczy dla 25 krów na 6 dni. Na ile dni starczyłby ten zapas dla 30 krów?