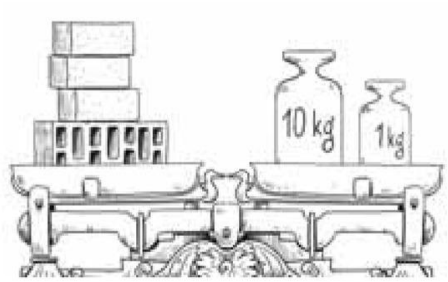
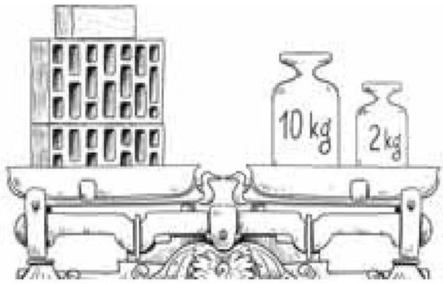
09.01.2021r. - matematyka – semestr I – lekcja 1, 2

Temat: Układy równań.

Ile waży jedna cegła, a ile — jeden pustak?





Przyjmijmy następujące oznaczenia:

x — masa cegły (w kg)

y — masa pustaka (w kg)

Informacje podane na rysunkach można opisać dwoma równaniami:

$$3x + y = 11 \qquad\qquad x + 2y = 12$$

Aby ustalić masę cegły i pustaka, musimy znaleźć taką parę liczb x i y, która spełnia oba równania jednocześnie. Tak postawiony problem można zapisać w postaci tzw. **układu równań**.

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

Zapisujemy równania jedno pod drugim i łączymy je klamrą.

Rozważmy najpierw pierwsze z równań tego układu równań. Łatwo sprawdzić, że równanie $3x + y = 11$ spełnia para liczb $x = 3$ i $y = 2$, a także para $x = 2{,}5$ i $y = 3{,}5$. Można znaleźć wiele par liczb spełniających to równanie.

Jeśli układ tworzą dwa równania z dwiema niewiadomymi, to parę liczb, która spełnia oba te równania jednocześnie, nazywamy **rozwiązaniem układu równań**.

Jedną z metod rozwiązywania układów równań jest **metoda podstawiania**, którą ilustruje poniższy przykład.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 2x + 3y = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4y \\ 2(-4y) + 3y = 25 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy x. Korzystając z równości $x = -4y$ w drugim równaniu, w miejsce x podstawiamy $-4y$.

$$\begin{cases} x = -4y \\ -5y = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4y \\ y = -5 \end{cases}$$

Pierwsze równanie przepisujemy, a drugie równanie (z jedną niewiadomą y) rozwiązujemy.

$$\begin{cases} x = -4 \cdot (-5) \\ y = -5 \end{cases}$$

Ponieważ $y = -5$, więc możemy obliczyć x (z pierwszego równania).

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = -5 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x = 20$ i $y = -5$.

ZADANIE Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2y - 5x = 4 \end{cases}$

Przy rozwiązywaniu układu równań metodą podstawiania można pozwolić sobie na uproszczenie zapisu. Gdy otrzymamy równanie z jedną niewiadomą, możemy je rozwiązać oddzielnie, nie przepisując za każdym razem układu dwóch równań.

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} 2(x + 1) = 3y \\ y + 2x = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2 = 3y \\ y = 10 - 2x \end{cases}$$

Pierwsze równanie przekształcamy, z drugiego równania wyznaczamy y.

$$2x + 2 = 3(10 - 2x)$$
$$2x + 2 = 30 - 6x$$
$$8x = 28$$
$$x = 3{,}5$$

W pierwszym równaniu w miejsce y podstawiamy $10 - 2x$ i rozwiązujemy otrzymane równanie.

$$y = 10 - 2 \cdot 3{,}5$$

Aby obliczyć wartość y, wstawiamy $3{,}5$ zamiast x do równania $y = 10 - 2x$.

$$\begin{cases} x = 3{,}5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x = 3{,}5$ i $y = 3$.

ZADANIE Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} x = 2y \\ x + 4y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - 3x = 2 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$

Kolejne przykłady przedstawiają inny sposób rozwiązywania układów równań — **metodę przeciwnych współczynników**.

PRZYKŁAD 3 Rozwiąż układ równań.

$$+\begin{cases} 2x + 6y = 15 \\ 3x - 6y = 25 \end{cases}$$

$$5x = 40$$

$$x = 8$$

Współczynniki przy niewiadomej y są liczbami przeciwnymi; dodajemy do siebie lewe i prawe strony obu równań, pozbywając się w ten sposób jednej niewiadomej, bowiem $6y + (-6y) = 0$.

$$2 \cdot 8 + 6y = 15$$

$$y = -\frac{1}{6}$$

Otrzymaną wartość $x = 8$ wstawiamy w miejsce x do jednego (dowolnego) równania układu i obliczamy wartość niewiadomej y.

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x = 8$ i $y = -\frac{1}{6}$.

ZADANIE Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 7x + 2y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4x - 2y = 13 \\ 4x + 11y = 14 \end{cases}$

09.01.2021r. - matematyka – semestr I – lekcja 1, 2

Temat: Układy równań oznaczone, nieoznaczone i sprzeczne.

Dla każdego układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi zachodzi jeden z trzech przypadków. Układ równań:

- ma jedno rozwiązanie; wtedy nazywamy go **układem oznaczonym**,
- nie ma rozwiązań; taki układ nazywa się **układem sprzecznym**,
- ma nieskończenie wiele rozwiązań; wówczas układ nazywamy **układem nieoznaczonym**.

PRZYKŁAD Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 3x - 4y = x + 1 \\ -\frac{1}{2}x + y = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - 4y = x + 1 \\ y = 3 + \frac{1}{2}x \end{cases}$

$$3x - 4\left(3 + \frac{1}{2}x\right) = x + 1$$
$$3x - 12 - 2x = x + 1$$
$$3x - 2x - x = 12 + 1$$
$$0 \cdot x = 13$$

Otrzymaliśmy równanie sprzeczne.

Układ równań jest sprzeczny (nie ma rozwiązań).

Żadna liczba x nie spełnia równania $0 \cdot x = 13$, więc na pewno nie istnieje para liczb (x, y) spełniająca rozważany układ równań.

b) $\begin{cases} x - 0{,}3y = 0{,}2 \\ 5x - 1 = 1{,}5y \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0{,}3y + 0{,}2 \\ 5x - 1 = 1{,}5y \end{cases}$

$$5(0{,}3y + 0{,}2) - 1 = 1{,}5y$$
$$1{,}5y + 1 - 1 = 1{,}5y$$
$$1{,}5y - 1{,}5y = 0$$
$$0 \cdot y = 0$$

Otrzymaliśmy równanie tożsamościowe.

Układ równań jest nieoznaczony (ma nieskończenie wiele rozwiązań).

Każda para liczb x, y, która spełnia równanie $x = 0{,}3y + 0{,}2$, jest rozwiązaniem tego układu równań.

Równanie $0 \cdot y = 0$ spełnia każda liczba. Gdy przyjmiemy za y dowolną liczbę, a za x liczbę równą $0{,}3y + 0{,}2$, to każda tak otrzymana para liczb spełnia rozważany układ równań.

ZADANIE Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 6x - 4y = 5 \\ 2y = 3x - 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x = 8y - 1 \\ 4y = x + \frac{1}{2} \end{cases}$