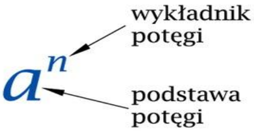
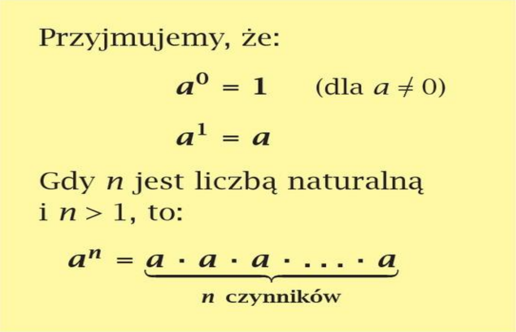
17.10.2020r. - matematyka – semestr I – lekcja 2 – str. 1

Temat: Potęgi o wykładniku całkowitym.

Definicja potęgi o wykładniku naturalnym



Uwaga. Wartość potęgi 0^0 nie jest określona, tzn. zapis 0^0 nie oznacza żadnej liczby.



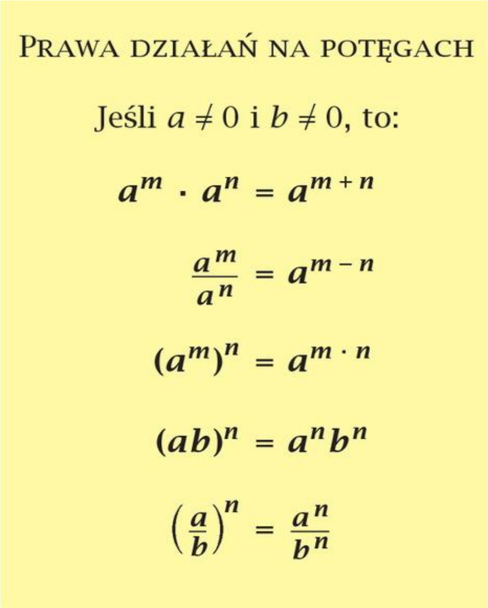
Przyjmujemy, że:

$$a^0 = 1 \qquad (\text{dla } a \neq 0)$$

$$a^1 = a$$

Gdy n jest liczbą naturalną i $n > 1$, to:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$



PRAWA DZIAŁAŃ NA POTĘGACH

Jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

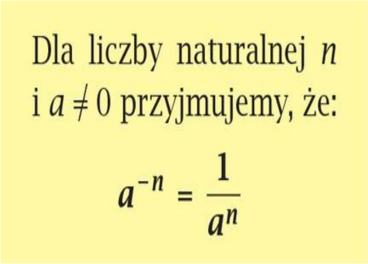
PRZYKŁAD 1 Przekształć wyrażenie, korzystając z praw działań na potęgach.

a) $\frac{13^{-7} \cdot 13^3}{13^{-3}} = \frac{13^{-7+3}}{13^{-3}} = \frac{13^{-4}}{13^{-3}} = 13^{-4-(-3)} = 13^{-1} = \frac{1}{13}$

b) $\frac{49^{-5}}{7^{20}} = \frac{(7^2)^{-5}}{7^{20}} = \frac{7^{-10}}{7^{20}} = 7^{-10-20} = 7^{-30}$

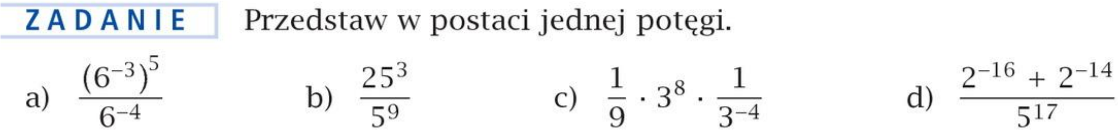
c) $\frac{4^3 \cdot (2^{-3})^4}{2^{-10} \cdot 8} = \frac{(2^2)^3 \cdot (2^{-3})^4}{2^{-10} \cdot 2^3} = \frac{2^6 \cdot 2^{-12}}{2^{-7}} = \frac{2^{-6}}{2^{-7}} = 2^{-6-(-7)} = 2$

d) $\frac{3^{-15} - 3^{-17}}{2^{20}} = \frac{3^{-17}(3^2 - 1)}{2^{20}} = \frac{3^{-17} \cdot 8}{2^{20}} = \frac{3^{-17} \cdot 2^3}{2^{20}} = 3^{-17} \cdot 2^{-17} = 6^{-17}$



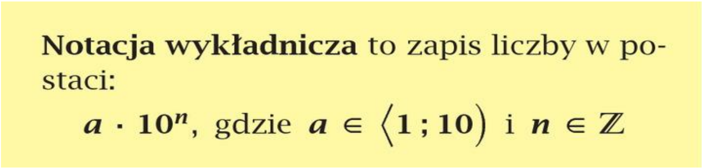
Dla liczby naturalnej n i $a \neq 0$ przyjmujemy, że:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$



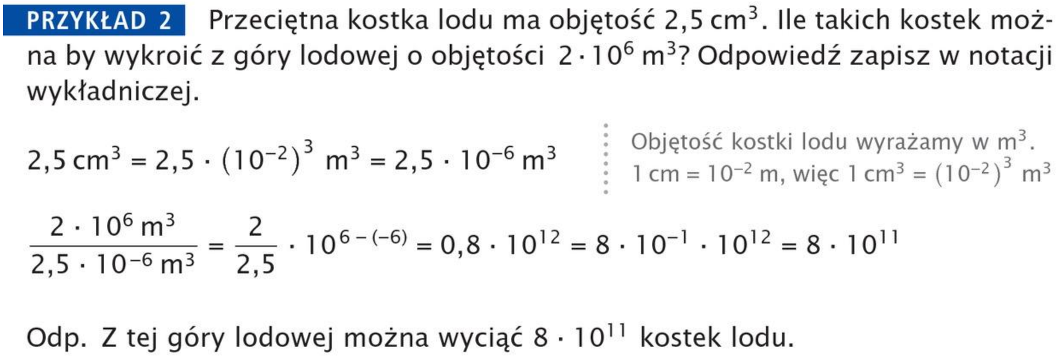
ZADANIE Przedstaw w postaci jednej potęgi.

a) $\frac{(6^{-3})^5}{6^{-4}}$ b) $\frac{25^3}{5^9}$ c) $\frac{1}{9} \cdot 3^8 \cdot \frac{1}{3^{-4}}$ d) $\frac{2^{-16} + 2^{-14}}{5^{17}}$



Notacja wykładnicza to zapis liczby w postaci:

$$\boldsymbol{a \cdot 10^{n}}, \text{ gdzie } \boldsymbol{a} \in \left\langle \mathbf{1\,;10} \right) \text{ i } \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$$



PRZYKŁAD 2 Przeciętna kostka lodu ma objętość 2,5 cm^3. Ile takich kostek można by wykroić z góry lodowej o objętości $2 \cdot 10^6\ \text{m}^3$? Odpowiedź zapisz w notacji wykładniczej.

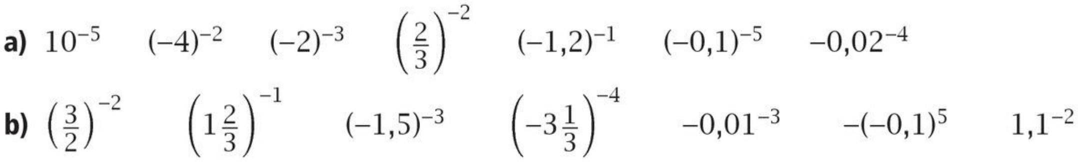
$$2{,}5\ \text{cm}^3 = 2{,}5 \cdot (10^{-2})^3\ \text{m}^3 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3$$

Objętość kostki lodu wyrażamy w m^3. 1 cm = 10^{-2} m, więc 1 $\text{cm}^3 = (10^{-2})^3\ \text{m}^3$

$$\frac{2 \cdot 10^6\ \text{m}^3}{2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3} = \frac{2}{2{,}5} \cdot 10^{6-(-6)} = 0{,}8 \cdot 10^{12} = 8 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{12} = 8 \cdot 10^{11}$$

Odp. Z tej góry lodowej można wyciąć $8 \cdot 10^{11}$ kostek lodu.

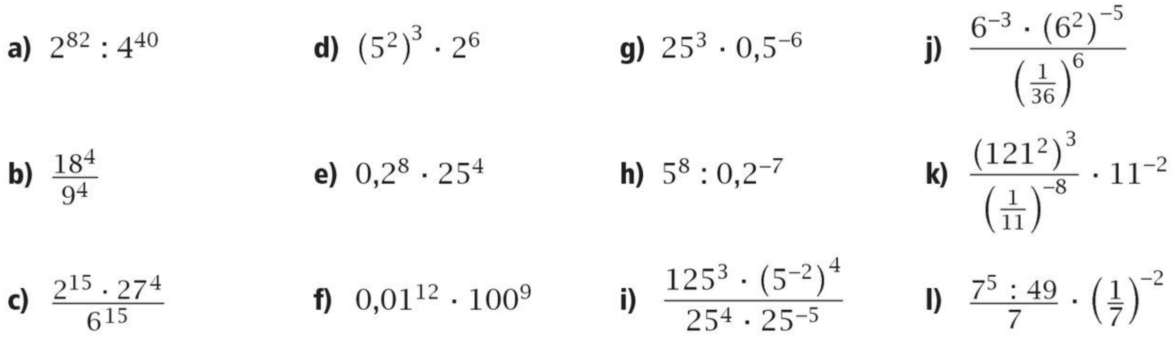
Zadanie 1. Oblicz.



a) 10^{-5} $(-4)^{-2}$ $(-2)^{-3}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ $(-1{,}2)^{-1}$ $(-0{,}1)^{-5}$ $-0{,}02^{-4}$

b) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-1}$ $(-1{,}5)^{-3}$ $\left(-3\frac{1}{3}\right)^{-4}$ $-0{,}01^{-3}$ $-(-0{,}1)^5$ $1{,}1^{-2}$

Zadanie 2. Oblicz.



a) $2^{82} : 4^{40}$

b) $\frac{18^4}{9^4}$

c) $\frac{2^{15} \cdot 27^4}{6^{15}}$

d) $(5^2)^3 \cdot 2^6$

e) $0{,}2^8 \cdot 25^4$

f) $0{,}01^{12} \cdot 100^9$

g) $25^3 \cdot 0{,}5^{-6}$

h) $5^8 : 0{,}2^{-7}$

i) $\frac{125^3 \cdot (5^{-2})^4}{25^4 \cdot 25^{-5}}$

j) $\frac{6^{-3} \cdot (6^2)^{-5}}{\left(\frac{1}{36}\right)^6}$

k) $\frac{(121^2)^3}{\left(\frac{1}{11}\right)^{-8}} \cdot 11^{-2}$

l) $\frac{7^5 : 49}{7} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$