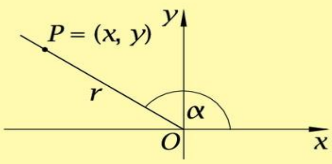
17.04.2021r. - matematyka – semestr IV – lekcja1, 2

Temat: Funkcje trygonometryczne kątów od 0° do 180°.



$r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\sin \alpha = \frac{y}{r}$

$\cos \alpha = \frac{x}{r}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ (dla $x \neq 0$)

Funkcje trygonometryczne kąta α definiujemy w następujący sposób:

Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P (drugiej współrzędnej) do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej punktu P (pierwszej współrzędnej) do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

Jeśli odcięta punktu P jest różna od zera, to **tangensem** kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odciętej tego punktu.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\text{jeśli } \cos \alpha \neq 0)$$

Poznane wcześniej tożsamości trygonometryczne zachodzą również dla wszystkich kątów, dla których wyrażenia występujące w tych tożsamościach mają sens.

PRZYKŁAD 1 Kąt α jest rozwarty i $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz $\cos \alpha$ oraz $\operatorname{tg} \alpha$.

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

Cosinus kąta rozwartego jest liczbą ujemną.

$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = \underline{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{-2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = \underline{\frac{-\sqrt{2}}{4}}$

ZADANIE Kąt α jest kątem rozwartym i $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

Obok zapisano trzy równości, które są spełnione dla dowolnego kąta ostrego α. Tego typu równości nazywamy wzorami redukcyjnymi. Łatwo te wzory uzasadnić, gdy sporządzimy odpowiedni rysunek.

$$\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$$
$$\text{tg}(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$

PRZYKŁAD 2 Oblicz: $\sin 125°$, $\text{tg}\,95°$, $\cos 135°$.

$\sin 125° = \sin(180° - 55°) = \sin 55° \approx \underline{0{,}8192}$

$\text{tg}\,95° = \text{tg}(180° - 85°) = -\text{tg}\,85° \approx \underline{-11{,}4301}$

Korzystamy ze wzorów i z tablic trygonometrycznych.

$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ZADANIE a) Korzystając z tablic trygonometrycznych, oblicz: $\sin 114°$, $\cos 116°$, $\text{tg}\,160°$.

b) Oblicz: $\sin 135°$, $\cos 150°$, $\text{tg}\,120°$.

PRZYKŁAD 3 a) Oblicz α, wiedząc, że $\sin\alpha = 0{,}6$ i $\alpha \in (0°; 180°)$.

$\sin\alpha = 0{,}6$

$\alpha \approx \underline{37°}$ lub $\alpha \approx 180° - 37° = \underline{143°}$

Odczytujemy z tablic lub za pomocą kalkulatora miarę kąta ostrego α spełniającego warunek $\sin\alpha = 0{,}6$. Ten warunek spełnia też kąt $180° - \alpha$.

b) Oblicz α, wiedząc, że $\cos\alpha = -0{,}3$ i $\alpha \in (0°; 180°)$.

$\cos\alpha = -0{,}3$

$\cos\alpha \approx -\cos 73° = \cos(180° - 73°) = \cos 107°$

$\alpha \approx \underline{107°}$

Odczytujemy z tabeli miarę kąta, dla którego cosinus jest równy 0,3.

Korzystamy z równości $-\cos\alpha = \cos(180° - \alpha)$.

c) Oblicz α, wiedząc, że $\text{tg}\,\alpha = -4$ i $\alpha \in (0°; 180°)$.

$\text{tg}\,\alpha = -4$

$\text{tg}\,\alpha \approx -\text{tg}\,76° = \text{tg}(180° - 76°) = \text{tg}\,104°$

$\alpha \approx \underline{104°}$

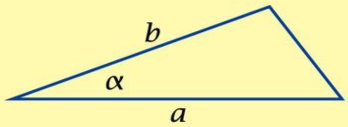
Odczytujemy z tabeli miarę kąta, dla którego tangens jest równy 4.

ZADANIE Oblicz α, jeśli wiadomo, że $\alpha \in (0°; 180°)$ oraz:

a) $\sin\alpha = 0{,}2$ b) $\cos\alpha = -0{,}6$ c) $\text{tg}\,\alpha = -\frac{3}{5}$

Twierdzenie

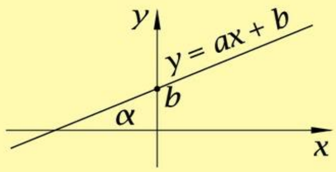
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch boków trójkąta i sinusa kąta między tymi bokami.



$$P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

Twierdzenie

Jeśli prosta o równaniu $y = ax + b$ przecina oś x, to współczynnik kierunkowy a jest równy tangensowi kąta nachylenia tej prostej do osi x.



$$a = \operatorname{tg}\alpha$$

PRZYKŁAD 4 Znajdź równanie prostej, która jest nachylona do osi x pod kątem 30° i przechodzi przez punkt $(6, 4)$.

$y = ax + b$

$a = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Współczynnik a jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej do osi x.

$4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 6 + b$, stąd $b = 4 - 2\sqrt{3}$

Punkt $(6, 4)$ leży na prostej, więc spełnia jej równanie.

$\underline{y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 - 2\sqrt{3}}$

ZADANIE Znajdź równanie prostej, która jest nachylona do osi x pod kątem 120° i przechodzi przez punkt $(1, -4)$.