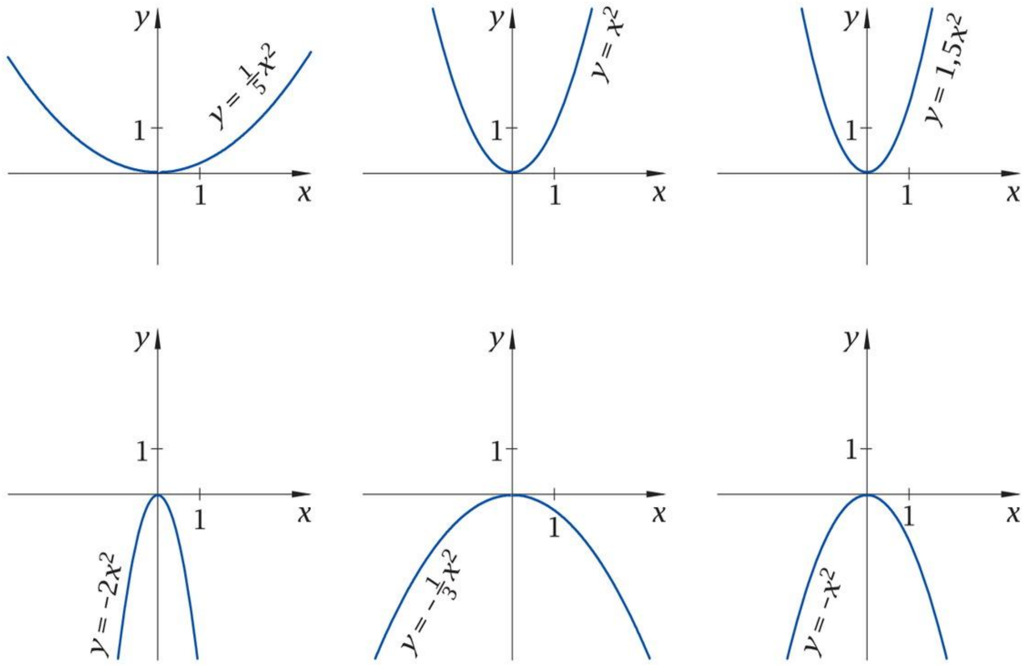
17.04.2021r. - matematyka – semestr II – lekcja1, 2

Temat: Parabola.

Poniżej narysowano wykresy kilku różnych funkcji typu $y = ax^2$.

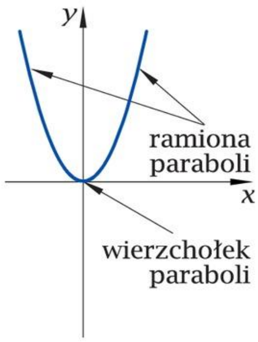


Krzywą, która jest wykresem funkcji $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **parabolą**. Wierzchołek paraboli $y = ax^2$ leży w początku układu współrzędnych, a oś y jest jej osią symetrii.

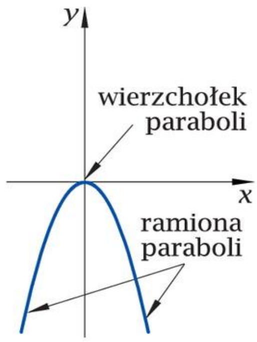
Gdy $a>0$, wykresem funkcji $y = ax^2$ jest parabola o ramionach skierowanych do góry. Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle 0;+\infty)$.

Gdy $a<0$, wykresem funkcji $y = ax^2$ jest parabola o ramionach skierowanych w dół. Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $(-\infty;0\rangle$.

$y = ax^2$ i $a > 0$



$y = ax^2$ i $a < 0$



Wykresem funkcji $y = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$
jest parabola o wierzchołku (p, q).

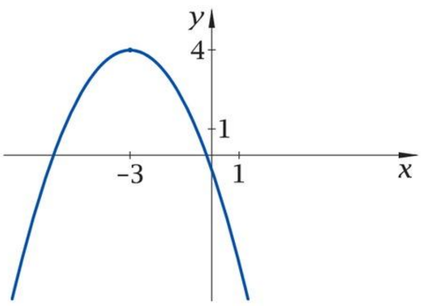
PRZYKŁAD 1 Jakie współrzędne ma wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 4$? Ustal zbiór wartości tej funkcji i określ przedziały jej monotoniczności.

$$y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 4$$

$$y = -\frac{1}{2}(x-(-3))^2 + 4$$

Zapisujemy wzór w postaci $y = a(x-p)^2 + q$

Wierzchołek paraboli: $(-3, 4)$



Zaznaczamy wierzchołek i szkicujemy wykres funkcji (ramiona paraboli skierowane w dół).

Zbiór wartości funkcji: $\left(-\infty; 4\right\rangle$

Największą wartością funkcji jest 4; funkcja osiąga dowolnie małe wartości.

Funkcja jest rosnąca w przedziale $\left(-\infty; -3\right\rangle$ i jest malejąca w przedziale $\left\langle -3; +\infty\right)$.

ZADANIE a) Jakie współrzędne ma wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji $y = \frac{2}{3}(x-7)^2 - 6$?

b) Jaką największą wartość przyjmuje funkcja $y = -\frac{1}{2}(x+4)^2 + 5$?

c) Określ przedziały monotoniczności funkcji $y = 1{,}5(x-2)^2 - 3$.

17.04.2021r. - matematyka – semestr II – lekcja1, 2

PRZYKŁAD 2 Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku $(13, -5)$, przechodząca przez punkt $(12, -8)$.

$y = a(x - p)^2 + q$

$y = a(x - 13)^2 - 5$ — $p = 13$ i $q = -5$

$-8 = a(12 - 13)^2 - 5$ — Wzór funkcji spełnia para liczb $x = 12$ i $y = -8$, bo punkt $(12, -8)$ należy do wykresu szukanej funkcji.

$-8 = a - 5$

$a = -3$

$\underline{y = -3(x - 13)^2 - 5}$

ZADANIE Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku $(-3, 2)$ przechodząca przez punkt $(7, -48)$.

17.04.2021r. - matematyka – semestr II – lekcja1, 2

Temat: Wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej i kanonicznej.

Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową**. Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.

Przykłady funkcji kwadratowych:

$$y = 3x^2 + 2x - 7$$

$$y = 5(x-1)^2 - 5$$

$$y = -3(x-2)(x-3)$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x^2 - 3(x+5)$$

Zapis $y = ax^2 + bx + c$ to **postać ogólna** wzoru funkcji kwadratowej. Poprzednio omawialiśmy własności funkcji kwadratowych, których wzory zapisywaliśmy w postaci $y = a(x-p)^2 + q$, nazywanej **postacią kanoniczną**.

$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$

postać ogólna

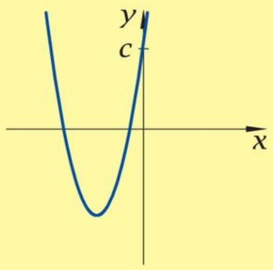
$\boldsymbol{y = a(x - p)^2 + q}$

postać kanoniczna

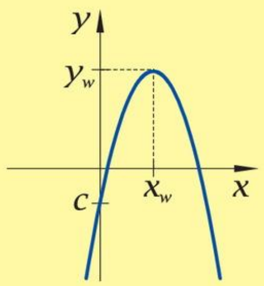
Przykłady wzorów funkcji kwadratowej:

w postaci ogólnej	w postaci kanonicznej
$y = x^2 + 6x + 11$	$y = (x+3)^2 + 2$
$y = 3x^2 - 42x + 147$	$y = 3(x-7)^2$
$y = -5x^2 + 10x$	$y = -5(x-1)^2 + 5$

Parabola $y = ax^2 + bx + c$ przecina oś y w punkcie $\mathbf{(0, c)}$.



17.04.2021r. - matematyka – semestr II – lekcja1, 2



Współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, można obliczyć, korzystając ze wzorów:

$$x_w = \frac{-b}{2a} \qquad y_w = \frac{-\Delta}{4a}$$

PRZYKŁAD 1 Zapisz wzór funkcji $y = -5x^2 - 3x - 2$ w postaci kanonicznej.

$$x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2\cdot(-5)} = -0,3$$

$a = -5,\ b = -3,\ c = -2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\cdot(-5)\cdot(-2) = -31$$

$$y_w = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-31)}{4\cdot(-5)} = -\frac{31}{20} = -1,55$$

Wierzchołek: $(-0,3, -1,55)$

Zapisujemy wzór w postaci kanonicznej: $y = a(x-p)^2 + q$ dla $a = -5$, $p = -0,3$, $q = -1,55$.

$$\underline{y = -5(x+0,3)^2 - 1,55}$$

ZADANIE Znajdź postać kanoniczną wzoru funkcji $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x - 1$.

17.04.2021r. - matematyka – semestr II – lekcja1, 2

PRZYKŁAD 2 Znajdź współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji $y=-\frac{1}{2}x^2+x\sqrt{2}+1{,}52$. Określ monotoniczność tej funkcji.

$$y=-\frac{1}{2}x^2+x\sqrt{2}+1{,}52$$

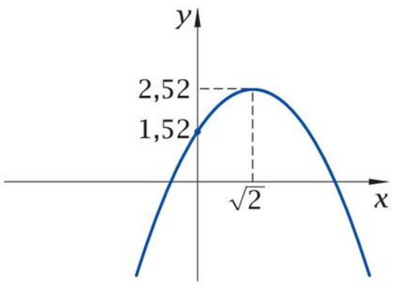
$$x_w=\frac{-b}{2a}=\frac{-\sqrt{2}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{2}$$

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka.

$$y_w=f\left(\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+1{,}52=2{,}52$$

Obliczamy drugą współrzędną wierzchołka, wstawiając $x=\sqrt{2}$ do wzoru funkcji $y_w=f(x_w)$.

Wierzchołek paraboli: $\left(\sqrt{2},\ 2{,}52\right)$



Zaznaczamy wierzchołek paraboli, punkt przecięcia z osią y i szkicujemy parabolę.

Funkcja jest rosnąca w przedziale $\left(-\infty;\ \sqrt{2}\right\rangle$ i jest malejąca w przedziale $\left\langle\sqrt{2};\ +\infty\right)$.

Odczytujemy z wykresu przedziały monotoniczności.

ZADANIE Określ monotoniczność funkcji $y=4x^2-4x-3$.