10.04.2021r. - matematyka – semestr II – lekcja 1, 2

Temat: Wyróżnik równania kwadratowego. Rozwiązywanie równań.

Umiejętność rozwiązywania równań typu $x^2 = d$ można wykorzystać przy rozwiązywaniu równań, w których po jednej stronie jest kwadrat pewnego wyrażenia, a po drugiej — liczba.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż równanie.

$$(2x-3)^2 = 5$$

$$2x - 3 = \sqrt{5} \quad \text{lub} \quad 2x - 3 = -\sqrt{5}$$

Istnieją dwie liczby, których kwadrat jest równy 5: liczba $\sqrt{5}$ i liczba $-\sqrt{5}$.

$$2x = 3 + \sqrt{5} \qquad 2x = 3 - \sqrt{5}$$

$$\underline{x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

Równanie ma dwa rozwiązania.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

$(x-1)^2 = 64$ $\qquad (2x+1)^2 = 10$ $\qquad (4x-8)^2 = 0$ $\qquad (3x-1)^2 = -9$

Pokażemy teraz, jak można rozwiązać równanie kwadratowe, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia. Rozważmy równanie:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Można je tak przekształcić, aby otrzymać równanie typu: $(x - \blacksquare)^2 = \blacktriangle$.

$$x^2 - \underset{\uparrow \atop 2 \cdot x \cdot 3}{6x} = -5$$

Zapisujemy równanie w innej postaci.

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = -5 + 3^2$$

$$(x-3)^2 = 4$$

Po dodaniu 3^2 do obu stron równania otrzymujemy po lewej stronie wyrażenie $(x-3)^2$.

$$x - 3 = 2 \quad \text{lub} \quad x - 3 = -2$$

$$x = 5 \quad \text{lub} \quad x = 1$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie.

W podobny sposób można rozwiązać każde równanie kwadratowe.

Metodę znajdowania rozwiązań równania kwadratowego opisaną na poprzedniej stronie można zastosować do przekształcenia równania kwadratowego w postaci ogólnej.

$ax^2 + bx + c = 0 \quad | : a$

$a \neq 0$, bo rozważamy równanie kwadratowe.

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

Przekształcamy równanie tak, aby po lewej stronie otrzymać kwadrat pewnego wyrażenia.

$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}$

$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

Liczba rozwiązań tego równania zależy od tego, czy iloraz $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ jest liczbą dodatnią, ujemną czy równą 0. Wartość wyrażenia $4a^2$ jest zawsze dodatnia, zatem liczba rozwiązań równania zależy od wartości wyrażenia $b^2 - 4ac$. To wyrażenie nazywamy **wyróżnikiem równania kwadratowego** i oznaczamy grecką literą Δ (czyt. delta):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Aby rozwiązać równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), najpierw obliczamy wartość wyrażenia:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Jeśli **$\Delta > 0$**, to równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli **$\Delta = 0$**, to równanie ma jedno rozwiązanie:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Jeśli **$\Delta < 0$**, to równanie nie ma rozwiązań.

10.04.2021r. - matematyka – semestr II – lekcja 1, 2

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż równanie.

a) $6x^2 - 13x + 5 = 0$

$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5 = 49$

$\Delta > 0$, więc równanie ma dwa rozwiązania.

$x_1 = \frac{-(-13) - \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{13 - 7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-(-13) + \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{13 + 7}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

Korzystamy ze wzorów: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{5}{3}$

b) $6x^2 + 4x + \frac{2}{3} = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} = 0$

$\Delta = 0$, więc równanie ma jedno rozwiązanie

$x = \frac{-4}{2 \cdot 6} = -\frac{1}{3}$

Korzystamy ze wzoru: $x = \frac{-b}{2a}$

c) $6x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = -23 < 0$

$\Delta < 0$, więc równanie nie ma rozwiązań.

Równanie nie ma rozwiązań.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + x + 20 = 0$ b) $4x^2 - 8x + 3 = 0$ c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$