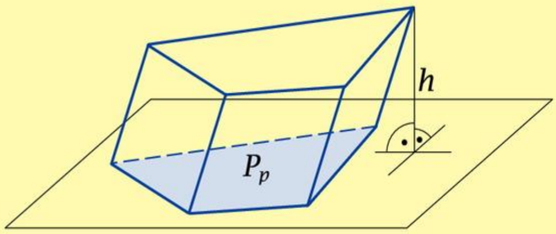
09.05.2021r. - matematyka – semestr IV – lekcja1, 2

Temat: Graniastosłupy.

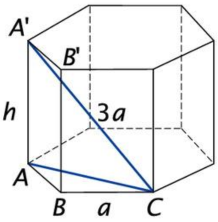


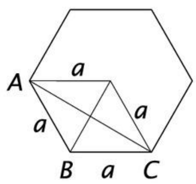
Objętość graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot h$$

P_p — pole podstawy graniastosłupa
h — wysokość graniastosłupa

PRZYKŁAD 2 W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma długość a, zaś krótsza przekątna ma długość $3a$. Oblicz pole powierzchni całkowitej oraz objętość tego graniastosłupa.





$$|AC| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

Krótsza przekątna podstawy jest 2 razy dłuższa niż wysokość trójkąta równobocznego o boku a.

$$h = \sqrt{|A'C|^2 - |AC|^2} = \sqrt{(3a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{6}$$

Trójkąt ACA' jest prostokątny.

$$P_p = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$P_s = a \cdot h = a \cdot a\sqrt{6} = a^2\sqrt{6}$$

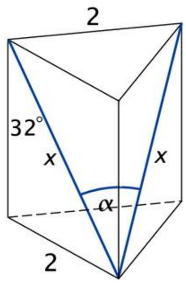
$$P_c = 2P_p + 6P_s = 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 6 \cdot a^2\sqrt{6} = \underline{3a^2(\sqrt{3} + 2\sqrt{6})}$$

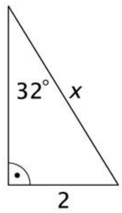
P_p – pole jednej podstawy
P_s – pole jednej ściany bocznej
P_c – pole powierzchni całkowitej

$$V = P_p \cdot h = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{6} = \frac{3a^3\sqrt{18}}{2} = \underline{\frac{9a^3\sqrt{2}}{2}}$$

ZADANIE W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym o wysokości a krótsza przekątna ma długość $4a$. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

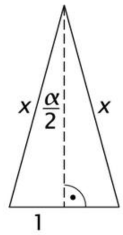
PRZYKŁAD 3 Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 2, a kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej i krawędzią boczną ma miarę 32°. Oblicz miarę kąta między przekątnymi ścian bocznych poprowadzonymi z jednego wierzchołka.





$$\frac{2}{x} = \sin 32^\circ$$

$$x = \frac{2}{\sin 32^\circ}$$



$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{2}{\sin 32^\circ}} = \frac{\sin 32^\circ}{2} \approx 0{,}265$$

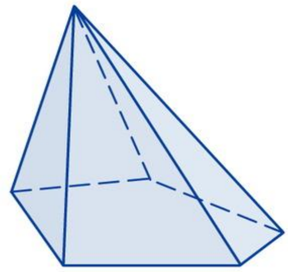
$$\frac{\alpha}{2} \approx 15^\circ, \text{ stąd } \underline{\alpha \approx 30^\circ}$$

ZADANIE Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 3, a kąt między przekątną ściany bocznej i krawędzią boczną ma miarę 40°. Oblicz miarę kąta między przekątnymi ścian bocznych poprowadzonymi z jednego wierzchołka.

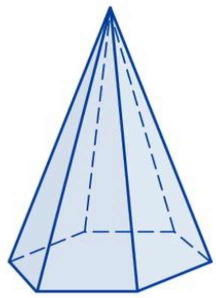
09.05.2021r. - matematyka – semestr IV – lekcja1, 2

Temat: Ostrosłupy.

Przypomnijmy, że ostrosłup to wielościan, w którym jedna ściana (podstawa) jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany (czyli ściany boczne) są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

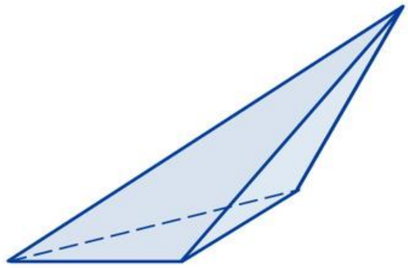


Ostrosłup, w którym podstawa jest wielokątem foremnym, a krawędzie boczne mają równe długości, nazywamy **ostrosłupem prawidłowym**.



Ostrosłup prawidłowy sześciokątny

Czworościan, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi, nazywamy **czworościanem foremnym**.

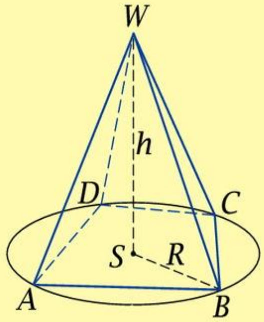


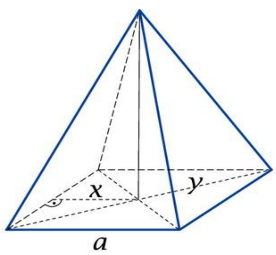
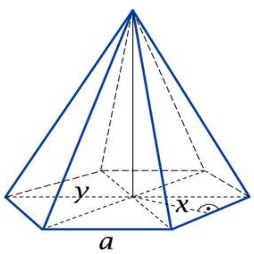
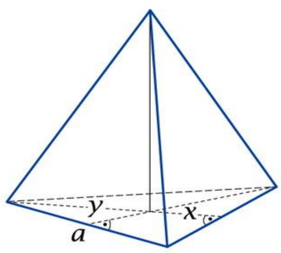
Czworościan (ostrosłup trójkątny)

09.05.2021r. - matematyka – semestr IV – lekcja1, 2

Twierdzenie

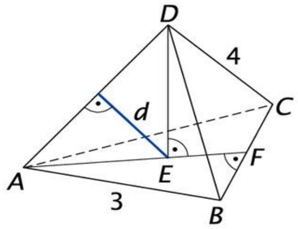
Jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają równe długości, to na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg. Środek tego okręgu jest spodkiem wysokości ostrosłupa.



ostrosłup prawidłowy czworokątny	ostrosłup prawidłowy sześciokątny	ostrosłup prawidłowy trójkątny
		
$x = \frac{a}{2}$	$x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$x = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$
$y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$y = a$	$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$

09.05.2021r. - matematyka – semestr IV – lekcja1, 2

PRZYKŁAD 1 Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 3, a jego krawędź boczna ma długość 4. Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od krawędzi bocznej.



$|AE| = \frac{2}{3}|AF| = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$|AE|^2 + |DE|^2 = |DA|^2$

$(\sqrt{3})^2 + |DE|^2 = 4^2$

$|DE| = \sqrt{13}$

$P_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{13} = \frac{\sqrt{39}}{2}$

$P_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot d = 2d$

Obliczamy pole trójkąta *AED* na dwa sposoby.

$2d = \frac{\sqrt{39}}{2}$, stąd $d = \frac{\sqrt{39}}{4}$

Odp. Odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznej wynosi $\frac{\sqrt{39}}{4}$.

ZADANIE Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4, a jego krawędź boczna ma długość 6. Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od krawędzi bocznej.