

## Matematyka LO IVA 23.05.2020r. 2 godziny

I. Temat: Rozwiązywanie równań wymiernych.

**Definicja:** Jeżeli  $f(x)$  i  $g(x)$  są wielomianami oraz  $g(x) \neq 0$ ,

to równanie w postaci  $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$  nazywamy równaniem wymiernym.

Aby rozwiązać równanie wymierne  $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , należy:

- wyznaczyć dziedzinę równania,
- przekształcić równanie na równoważne równaniem,
- wyznaczyć miejsca zerowe wielomianu  $f(x)$ ,
- wyznaczyć zbiór rozwiązań równania, jako część wspólną dziedziny i zbioru miejsc zerowych.

**Przykład 1.** Rozwiąż równanie:

$$\frac{4}{x-2} - \frac{5}{x+2} = \frac{20}{x^2-4} \rightarrow (x-2)(x+2)$$

Ustalamy dziedzinę równania:

$$\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \\ (x-2)(x+2) \neq 0 \end{cases} \quad \text{czyli } x \neq 2 \text{ i } x \neq -2 \quad D = R \setminus \{-2, 2\}$$

$$\frac{4}{x-2} - \frac{5}{x+2} - \frac{20}{(x-2)(x+2)} = 0$$

Ułamki sprowadzamy do wspólnego mianownika:

$$\frac{4(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{5(x-2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{20}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\frac{4(x+2) - 5(x-2) - 20}{(x-2)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow 4(x+2) - 5(x-2) - 20 = 0$$

$$4x + 8 - 5x + 10 - 20 = 0$$

$$-x - 2 = 0$$

$$-x = 2, \quad x = -2$$

Równanie nie ma rozwiązania:  $x \in D$

### Zadanie 2.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2 - 2}{x^2 + x}$$

Ustalamy dziedzinę:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x + 1 \neq 0 \\ x(x+1) \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 : x \neq -1 \end{cases} \quad D = R \setminus \{0, -1\}$$

Ułamki w równaniu sprowadzamy do wspólnego mianownika:

$$\frac{1(x+1)}{x(x+1)} + \frac{1 \cdot x}{x(x+1)} - \frac{x^2 - 2}{x(x+1)} = 0$$

$$\frac{x+1+1-x^2+2}{x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$$

(mianownik  $\neq 0$ )

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16, \quad \sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Sprawdzam rozwiązanie i dziedzinę:

Ponieważ -1 jest wyrzucone z dziedziny, więc nie może być rozwiązaniem.

Rozwiązaniem jest  $x = 3$

## Temat II Rozwiązywanie nierówności wymiernych.

**Definicja:** Nierównością wymierną nazywamy nierówność:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0,$$

Gdzie  $f(x), g(x)$  są wielomianami i  $g(x) \neq 0$

Uwaga:

Rozwiązywanie nierówności wymiernych sprowadza się do rozwiązywania nierówności wielomianowych, ponieważ:

$$1. \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} f(x) > 0 & g(x) > 0 \\ & & f(x) < 0 & g(x) < 0 \end{matrix}$$

$$2. \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} f(x) \geq 0 & g(x) \geq 0 \\ & & f(x) \leq 0 & g(x) \leq 0 \end{matrix}$$

### Przykład1.

Rozwiąż nierówność:  $\frac{4-5x}{x+2} < 0 \quad x + 2 \neq 0$

$$x \neq -2$$

$$\frac{4-5x}{x+2} < 0 \Leftrightarrow (4-5x)(x+2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$-5 \left( x - \frac{4}{5} \right) (x+2) < 0 /: (-5)$$

$$\left( x - \frac{4}{5} \right) (x+2) > 0$$

$$x - \frac{4}{5} = 0$$

$$x = \frac{4}{5} \quad \text{or} \quad x = -2$$



$$x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{4}{5}; +\infty\right)$$

### Zadanie 2.

Rozwiąż nierówność:

$$\frac{2x-1}{2x-3} + 1 < 0$$

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$x \neq \frac{3}{2}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$\frac{2x-1}{2x-3} + \frac{2x-3}{2x-3} < 0$$

$$\frac{2x-1+2x-3}{2x-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{4x-4}{2x-3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4x-4)(2x-3) < 0 \Leftrightarrow 4(x-1) * 2\left(x - \frac{3}{2}\right) < 0 : 8$$

$$4x - 4 = 0 \quad 2x - 3 = 0$$

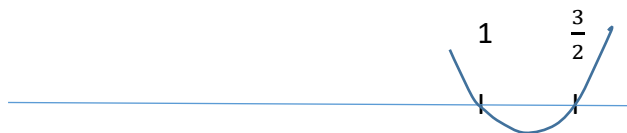
$$4x = 4$$

$$2x = 3$$

$$(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right) < 0$$

$$x = 1$$

$$x = \frac{3}{2}$$



$$x \in \left(1; \frac{3}{2}\right) \text{ lub } 1 < x < \frac{3}{2}$$

Rozwiąż samodzielnie:

$$1) \frac{x-3}{2x+2} - \frac{1}{x+1} \geq 0$$

$$2) \frac{x-2}{x} - \frac{3x-1}{x^2} \leq 0$$