Matematyka LO IVA **17.05.2020r.**

Lekcja I: Funkcja wymierna – działania

Definicja:

Funkcją wymierną nazywamy funkcję w postaci $\boldsymbol{f(x)=\frac{W(x)}{P(x)}, gdzie\ P(x)}$ nie jest wielomianem zerowym.

Dziedzina funkcji wymiernej:

a) wyznacz dziedzinę funkcji f:

$$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}$$

1. Wyznaczam miejsce zerowe wielomianu z mianownika:

$x^2-1=0$

$(x-1)(x+1)=0$

$x-1=0 \quad \cup \quad x+1=0$

$x=1 \quad \cup \quad x=-1$

Zatem dziedziną $Df=R\setminus\{-1,\ 1\}$

b) $g(x)=\frac{x}{x+1}$

Wyznaczam miejsce zerowe mianownika:

$x+1=0$

$x=-1$

$Df=R\setminus\{-1\}$

b) $f(x)=\frac{x}{x^2-x+2}$

miejsce zerowe mianownika:

$x^2-x+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4*1*2=1-8=-7<0$

Ponieważ $\Delta < 0$, trójmian nie posiada miejsc zerowych.

$Df = R$

Zadanie 1. Skróć ułamek, podaj założenia:

$$\frac{x^3 - 9x}{x^2 + x - 12}$$

1. $x^2 + x - 12 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 * 1 * (-12) = 1 + 48 = 49 \qquad \sqrt{\Delta} = 7$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 7}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 7}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$D = R \setminus \{-4, \quad 3\}$

Wielomiany w liczniku i mianowniku rozkładam na czynniki:

$$\frac{x^3 - 9x}{x^2 + x - 12} = \frac{x(x^2 - 9)}{(x+4)(x-3)} = \frac{x\cancel{(x-3)}(x+3)}{(x+4)\cancel{(x-3)}} = \frac{x(x+3)}{x+4}$$

Zadanie 2. Skróć ułamek:

$$\frac{3x - 2}{4 - 9x^2} = \frac{3x - 2}{-9x^2 + 4} = \frac{3x - 2}{-(9x^2 - 4)} = \frac{\cancel{3x - 2}}{-\cancel{(3x - 2)}(3x + 2)} = -\frac{1}{3x + 2}$$

$$(3x - 2)(3x + 2) = 0$$

$$3x - 2 = 0 \quad \cup \quad 3x + 2 = 0$$

$$3x = 2 \quad \cup \quad 3x = -2$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \cup \quad x = -\frac{2}{3}$$

$D = R \setminus \{-\frac{2}{3} : \frac{2}{3}\}$ czyli $x \neq -\frac{2}{3}$ $\; i \;$ $x \neq \frac{2}{3}$

Lekcja II , III **Temat: Działania na wyrażeniach wymiernych.**

Zadanie 1. Wykonaj działania:

$$\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+3}{2-x}=$$

a) Założenia:

$$\begin{cases} x+2\neq 0 \\ 2-x\neq 0 \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} x\neq -2 \\ x\neq 2 \end{cases} \quad <=> x\in R\ \{-2,\ 2\}$$

$$\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+3}{-(x-2)}=\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+3}{x-2}=$$

Ułamki sprowadzamy do wspólnego mianownika:

Wspólnym mianownikiem jest: $(x+2)(x-2)$

$$=\frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{(x+3)(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{(x+1)(x-2)-(x+3)(x+2)}{(x+2)(x-2)}=$$

$$\frac{x^2-2x+x-2-(x^2+2x+3x+\cancel{6)}}{(x+2)(x-2)}-\frac{x^2-x-\cancel{2}-x^2-5x-6}{(x+2)(x-2)}=\frac{-6x-8}{x^2-4}$$

$$=\frac{-(6x+8)}{x^2-4}$$

Zadanie 2.

$$\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-2}=$$

Założenia: $\begin{cases} x+2\neq 0 \\ x-2\neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\neq -2 \\ x\neq 2 \end{cases} \quad <=> \quad x\in R\ \{-2,\ 2\}$

Ułamki sprowadzamy do wspólnego mianownika:

$$\frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{1(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{2x-4-x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{x-6}{x^2-4}$$

Zadanie 3.

$$\frac{3}{2x+2}-\frac{2}{3x-3}+\frac{5x+3}{6x^2-6}=$$

Założenia:

$$\begin{cases}2x+2\neq 0\\3x-3\neq 0\\6x^2-6\neq 0\end{cases} <=> \begin{cases}2x\neq -2\\3x\neq 3\\6(x^2-1)\neq 0\end{cases} <=> \begin{cases}x\neq -1\\x\neq 1\\(x-1)(x+1)\neq 0\end{cases} <=> \begin{cases}x\neq -1\\x\neq 1\end{cases}$$

$$x-1\neq 0 \quad x\neq 1$$
$$x+1\neq 0 \quad x\neq -1$$

$x\in R\setminus\{-1\ :\ 1\}$

Mianownik rozkładamy na iloczyny:

$$\frac{3}{2(x+1)}-\frac{2}{3(x-1)}+\frac{5x+3}{6(x^2-1)}=\frac{3}{2(x+1)}-\frac{2}{3(x-1)}+\frac{5x+3}{6(x-1)(x+1)}=$$

Wspólny mianownik: w pierwszym ułamku nie mamy mianowniku:$3(x-1)$*,*
w drugim 2(x+1), a w trzecim mamy $\frac{}{6(x+1)(x-1)}$ *cały mianownik i nic nie wprowadzamy,*

a więc:

$$\frac{3*2(x-1)}{\mathbf{2}*3\,(x+1)(\boldsymbol{x-1})}-\frac{2*2(x+1)}{3*\mathbf{2}\,(x-1)(\boldsymbol{x+1})}-\frac{5x+3}{6\,(x-1)(x+1)}=$$

Zapisujemy ułamki na 1 kresce ułamkowej:

$$\frac{6(x-1)-4(x+1)+5x+3}{6\,(x-1)(x+1)}=\frac{6x-6-4x-4+5x+3}{6\,(x^2-1)}=\frac{7x-7}{6x^2-6}$$

Zadanie 4. Wykonaj działanie:

$$\frac{x-25}{x^2-3x}+\frac{x-9}{x^2+5x}=$$

założenia:

$$\begin{cases}x^2-3x\neq 0\\x^2+5x\neq 0\end{cases} <=> \begin{cases}x(x-3)\neq 0\\x(x+5)\neq 0\end{cases}$$ *sprawdzamy, kiedy iloczyny równe zero:*

$x(x-30)=0$ *iloczyn* $\neq$ *od zera*:

$x=0 \quad \cup \quad x-3=0$ *dla* $x\neq 0 \;\; i\, x\neq \; +3$

$x=0 \quad \cup \quad x=+3$

$x(x+5)\neq 0$ *czyli sprawdzam, kiedy = 0*

$x=0 \;\; lub\; x+5=0$

$x=0 \;\; lub \;\; x=-5$ *iloczyn* $\neq 0\; dla\; x\neq 0\; i\; x\neq -5$

$x\in R \setminus \{0,+3,-5\}$

Mianowniki w ułamkach zapisujemy w postaci iloczynu:

$\frac{x-25}{x(x-3)}+\frac{x-9}{x(x+5)}$ *ustalamy wspólny mianownik*

$\frac{(x-25)(x+5)}{x(x-3)(x+5)}$ *do I mianownika wprowadzamy (x+5)więc licznik również mnożymy przez (x+5)*

drugi ułamek:

$\frac{x-9}{x(x+5)}$ *Wprowadzamy, czyli licznik i mianownik mnożymy przez (x-3)*

$$\frac{(x-9)(x-3)}{x(x+5)(x-3)}$$

Mamy:

$$\frac{(x-25)(x+5)+(x-9)(x-3)}{x(x+5)(x-3)}=\frac{x^2+5x-25x-125+x^2-3x-9x+27}{x(x+5)(x+3)}$$

$$=\frac{2x^2-32x-98}{x(x^2-3x+5x-15)}=\frac{2x^2-32x-98}{x^3+2x^2-15x}$$

Zadanie 5. Wykonaj mnożenie:

$\frac{x^2-25}{x^2-3x}*\frac{x^2-9}{x^2+5x}=$ *wykonujemy z zasadą mnożenia ułamków, przed wymnożeniem skracamy. W tym celu musimy sumy w liczniku i mianowniku zapisać w postaci iloczynów:*

$$\frac{(x-5)\cancel{(x+5)}}{x\cancel{(x-3)}}\cdot\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{x\cancel{(x+5)}} = \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

$$= \frac{(x-5)(x+3)}{x^2} = \frac{x^2+3x-5x-15}{x^2} = \frac{x^2-2x-15}{x^2}$$

Dzielenie wyrażeń wymiernych dzielimy stosując zasadę dzielenia ułamków:

Przykład:

$$\frac{x}{2x-1} : \frac{x}{2x-1} = \quad \begin{cases} 2x-1 \neq 0 \ \ i \ \ x = \frac{1}{2} \\ x \neq 0 \qquad\quad i \ \ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{x}}{\cancel{2x-1}} * \frac{\cancel{2x-1}}{\cancel{x}} = 1$$

Zadanie 6. Wykonaj dzielenie:

$$\frac{x^2-9}{3} : \frac{x-3}{6x} = \frac{x^2-9}{3} * \frac{6x}{x-3} = \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\underset{1}{\cancel{3}}} * \frac{\overset{2}{\cancel{6}}x}{\cancel{x-3}}$$

Założenia: $\begin{cases} 6x \neq 0 \qquad x \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \quad x \neq 3 \end{cases}$

$$= \frac{2(x+3)}{1} = 2x+6$$